UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1990/91

Mac/April 1991

JAM 231 Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Buktikan dengan menggunakan teknik ε - δ

(i) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ diberi

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x > 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} (5x^2 - 3) = 2.$

(35 markah)

(b) Dapatkan titik-titik minimum, maksimum dan lengkuk balas bagi

$$f(x) = (x^2 - 1)^4.$$

Kira kecerunan di titik lengkuk balas. Lakarkan graf f dan tunjukkan dengan jelas kedudukan titik-titik berkenaan.

(30 markah)

(c) (i) Nyatakan Teorem Nilai Pertengahan.

(ii) Diberi g ialah suatu fungsi yang selanjar pada selang [0, 1] dan $0 \leq g(x) \leq 1$ untuk semua $x \in [0, 1]$. Tunjukkan bahawa wujud $\alpha \in [0, 1]$ supaya $f(\alpha) = \alpha$.

(35 markah)

...3/-

2. (a) Bilakah suatu jujukan $\{a_n\}$ itu dikatakan

(i) terbatas?
(ii) menokok?
(iii) menyusut?
(iv) jujukan Cauchy?
(v) menumpu?

(30 markah)

(b) Nyatakan teorem yang mengaitkan di antara penumpuan jujukan $\{a_n\}$ dengan kriterium Cauchy. Dengan menggunakan teorem ini buktikan bahawa jujukan

$$\left\{ \frac{2^n + (-1)^n}{n} \right\}$$

menumpu.

(30 markah)

(c) Cari

(i) $\displaystyle \operatorname*{had}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \text{ kos } (n\pi), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $\displaystyle \operatorname*{had}_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

(iii) $\displaystyle \operatorname*{had}_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left[\text{Petunjukkan: } \operatorname*{had}_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \right]$$

(40 markah)

3. (a) (i) Nyatakan ujian Kamiran untuk menentukan penumpuan siri $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Tentukan sama ada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

menumpu atau tidak.

(ii) Nyatakan ujian nisbah untuk menentukan penumpuan atau pencapahan siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tunjukkan bahawa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$$

mencapah.

(45 markah)

(b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu secara mutlak atau bersyarat.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n + 100}{4n + 1}\right)^n$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

(55 markah)

4. (a) Diberi suatu siri kuasa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x - a)^n.$$

Tunjukkan bahawa jika siri kuasa ini menumpu pada $x = x_1 \neq a$, maka ia menumpu secara mutlak untuk semua nilai x yang memenuhi.

$$|x - a| < |x_1 - a|.$$

(30 markah)

(b) Kira jejari atau selang penumpuan bagi siri kuasa

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^n.$

(40 markah)

(c) Tunjukkan bahawa

$$\frac{d}{dx} \{\ln (1 + \sqrt{1 + x^2})\} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Seterusnya tunjukkan bahawa

$$\ln (1 + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{x^3}{2(3)} + \frac{3x^5}{2(4)(5)} - \dots$$

(30 markah)

5. (a) Bilakah suatu fungsi f dikatakan terbezakan di titik x yang terletak di dalam domain f? Tunjukkan bahawa

$$f(x) = |x|$$

tidak terbezakan pada $x = 0$.

(20 markah)

(b) (i) Nilaikan $\underset{x \to 0}{\text{had}}\ x \ln x,\ x \in (0, \infty)$.

(ii) Cari titik-titik ketakselanjaran bagi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x - 3)} & , \quad x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad 1 < x < 2 \\ 4 & , \quad x = 2 \\ x^2 - \dfrac{7}{2} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

dan kelaskan jenis-jenis ketakselanjaran ini.

(iii) Jika $y = \sin x$, tunjukkan bahawa

$$\frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = x \text{ kot } x.$$

(50 markah)

(c) Jika $f^{(n)}(x)$ dan $g^{(n)}(x)$ wujud maka

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \,.\, g^{(n-k)}(x).$$

Tunjukkan bahawa

$$f^{(n+1)}(0) + n(n+1) f^{(n-1)}(0) = 0, \; n \geq 2,$$

diberi $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Seterusnya nilaikan $f^{(n)}(0)$.

$\left[\text{Catatan: } \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \right]$

(30 markah)

6. (a) (i) Nyatakan ujian Dirichlet.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\text{kos}\,\frac{x}{2} - \text{kos}\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

jika $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots.$ Seterusnya dengan menggunakan ujian Dirichlet tunjukkan bahawa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log(1+n)}, \; x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right],$$

menumpu secara seragam.

(30 markah)

...8/-

(b) (i) Katakan fungsi f mempunyai n + 1 terbitan selanjar pada selang [a, x). Maka

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right] + R_{n+1}(x).$$

Tuliskan bentuk kamiran, bentuk Lagrange dan bentuk Cauchy bagi baki $R_{n+1}(x)$.

(ii) Polinomial $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ dinamakan polinomial Taylor. Dapatkan $P_3(x)$ dan bentuk Lagrange $R_4(x)$ untuk $\sin^2 x$ disekitar $x = \frac{\pi}{3}$.

(30 markah)

(iii) Cari nilai hampiran jitu kepada 4 tempat perpuluhan bagi ln (0.7). Gunakan baki daripada rumus Taylor untuk membuat anggaran tentang ralatnya.

(40 markah)

oooooOooooo