

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

JAM 221 Kalkulus II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik boleh digunakan.
-

1. (a) Cari dua penyelesaian tak bersandar linear berbentuk $y = x^r$ dengan r sebagai pemalar bagi persamaan

$$x^2 y'' + xy' - y = 0, \quad (x > 0).$$

Dengan ini dapatkan penyelesaian am bagi

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{x}{1+x}$$

(40 markah)

- (b) Gerakan bagi suatu jisim yang terletak pada suatu spring tegak dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} x'' + 121x &= 180 \cos \alpha t, \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

di sini x ialah jarak seketika bagi jisim daripada kedudukan keseimbangan, arah ke bawah dianggap sebagai arah positif.

- (i) Apakah nilai α supaya resonans akan berlaku?
- (ii) Cari kedudukan jisim pada sebarang masa untuk semua $\alpha > 0$ kecuali nilai α di dalam (i).
- (iii) Jika $\alpha = 9$, tunjukkan bahawa penyelesaian dapat ditulis sebagai

$$x = 4 \sin t \sin 10t.$$

(60 markah)

...3/-

2. (a) Jika $x = 2r - s$ dan $y = r + 2s$, dan u adalah suatu fungsi r, s yang semua terbitan separanya selang, tunjukkan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Seterusnya, cari $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(30 markah)

- (b) (i) Tuliskan pembeza seluruh df bagi $f(x, y)$.
- (ii) Dengan menggunakan pembeza seluruh, cari nilai hampiran bagi ungkapan

$$\sqrt{27} \sqrt[3]{1021}$$

(30 markah)

- (c) Katakan $x^2 + y^2 + 2u^2 + 3v^2 - 7 = 0$ dan $2x^2 - 3y^2 + 3uv - 2 = 0$.
Pada titik $(u, v, x, y) = (1, 1, 1, 1)$, cari nilai

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$$

(40 markah)

...4/-

3. (a) Nilaikan kamiran

$$\iint_R \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx dy, \quad a > 0, b > 0$$

di mana R adalah rantau yang dibatasi oleh elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(30 markah)

(b) Cari nilai $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

di sini R adalah sukuan $x \geq 0, y \geq 0$ dalam satah xy . Deduksikan bahawa

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

(30 markah)

(c) Suatu bongkah V berbentuk kon yang diberikan oleh

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 3z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Ketumpatannya adalah suatu pemalar α . Cari jisim dan pusat jisimnya.

(40 markah)

...5/-

4. (a) Diberi $\underline{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ dan $\underline{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$. Cari nilai α jika vektor $\underline{a} - \alpha\underline{b}$ berserenjang kepada vektor $\underline{a}$.

(15 markah)

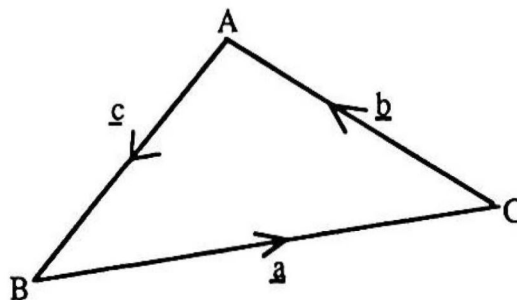
- (b) Jika $\underline{w} = a\underline{u} + b\underline{v} + c(\underline{u} \times \underline{v})$ dan $\underline{u}, \underline{v}$ masing-masing mempunyai magnitud 2 dan 3 unit, dan sudut di antara $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah $\frac{\pi}{3}$, buktikan bahawa

$$|\underline{w}|^2 = 4a^2 + 6ab + 9b^2 + 27c^2.$$

(25 markah)

- (c) Di dalam segitiga ABC

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$$



Buktikan bahawa

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a}$$

Dengan ini deduksikan rumus sinus bagi segitiga

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

di sini $a = |\underline{a}|, b = |\underline{b}|, c = |\underline{c}|$.

(40 markah)

- (d) Tentukan sama ada garis lurus yang melalui titik-titik (1, -4, 2) dan (2, 0, 1) selari dengan garis

$$\frac{x - 3}{-1} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z + 2}{1}.$$

(20 markah)

5. (a) Nilaikan kamiran

$$\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

di sini K ditakrifkan oleh set

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 4 - y\}$$

(40 markah)

- (b) Cari penyelesaian am bagi persamaan

$$y'' + 4y' + 3y = 15e^{2x} + e^{-x}$$

(30 markah)

- (c) Andaikan f ialah fungsi terhadap tiga pembolehubah yang diberikan oleh

$$w = f(x - y, y - z, z - x).$$

Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

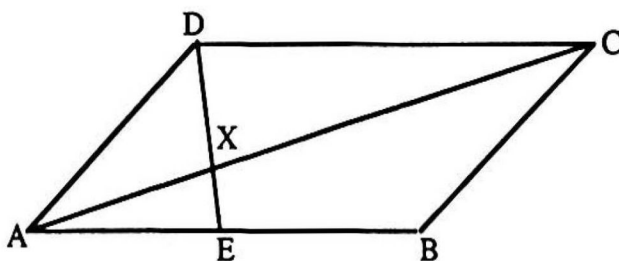
(30 markah)

...7/-

6. (a) Cari nilai maksimum bagi xy^2z^3 di atas sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

(30 markah)

(b)



Dalam segiempat selari ABCD, E adalah titik tengah bagi AB dan DE bersilang dengan pepenjuru AC pada titik X. Katakan $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ dan $\underline{x}$ adalah masing-masing vektor kedudukan bagi titik A, B, C, D, E dan X.

Tunjukkan

$$\frac{\underline{d} + 2\underline{e}}{3} = \frac{2\underline{a} + \underline{c}}{3} = \underline{x}$$

dan dengan ini cari nisbah AX : XC

(35 markah)

- (c) Dengan menggunakan penggantian

$$x = (r \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, y = (r \sin \theta)^{\frac{1}{2}},$$

nilaikan

$$\iint_R x^3(1 - x^4 - y^4) dx dy$$

di sini R adalah rantau yang ditakrifkan oleh

$$x \geq 0, y \geq 0, x^4 + y^4 \leq 1.$$

(35 markah)

oooooooo

