

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

JIM 413/317 - Persamaan Pembezaan II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
-

1. (a) Bincangkan sama ada penyelesaian siri kuasa di sekitar titik $x = x_0$ dalam bentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ wujud bagi persamaan pembezaan berikut,

$$xy'' + y' + xy = 0$$

(i) $x_0 = 2$

(ii) $x_0 = 0$

Jika wujud, tentukan selang penumpuan bagi siri tersebut.

(40 markah)

- (b) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

dan perhatikan bahawa $x = 0$ adalah titik biasa. Cari penyelesaian siri bagi persamaan siri bagi persamaan ini di dalam bentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(60 markah)

2. Tunjukkan bahawa persamaan Bessel berperingkat $\frac{1}{2}$,

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

boleh dimudahkan kepada persamaan

$$\gamma'' + \gamma = 0$$

melalui penukaran pembolehubah $y = x^{-1/2} \gamma(x)$. Dengan ini, buktikan

$$y_1(x) = x^{-1/2} \sin x \quad \text{dan} \quad y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$$

adalah dua penyelesaian bagi persamaan Bessel berperingkat $\frac{1}{2}$.

(100 markah)

3. Pertimbangkan masalah Sturm-Liouville sekata

$$(xy')' + \lambda^2 \left(\frac{1}{x} \right) y = 0, 1 < x < 2$$

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = 0.$$

- (a) Tunjukkan bahawa

$$y(x) = A \cos(\lambda \ln x) + B \sin(\lambda \ln x)$$

adalah penyelesaian am bagi persamaan pembezaan.

(40 markah)

- (b) Cari nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah nilai sempadan yang diberi.

(30 markah)

- (c) Cari kembangan siri bagi fungsi

$$f(x) = x$$

dalam sebutan fungsi eigen.

Apakah nilai bagi penumpuan siri dititik di $x = 1$ dan $x = 2$?

(30 markah)

4. (a) Huraikan pengertian adjoint dan swa-adjoint bagi persamaan pembezaan

$$p(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = F(x).$$

(30 markah)

- (b) Diberi persamaan pembezaan

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

- (i) Cari adjoint persamaan pembezaan ini.

- (ii) Dengan menentukan penyelesaian bagi persamaan adjoint ini, selesaikan persamaan pembezaan yang diberi.

(70 markah)

5. (a) Diberi persamaan tak linear

$$\frac{dx}{dt} = x^2(x^2 - 1)$$

$$x(0) = x_0, -\infty < x_0 < \infty$$

Tentukan titik-titik genting bagi persamaan pembezaan tersebut dan bincangkan kestabilan setiap penyelesaian keseimbangannya. Lakarkan graf x terhadap t .

(50 markah)

- (b) Cari nilai eigen bagi sistem persamaan pembezaan linear

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

Seterusnya, nyatakan jenis titik genting $(0, 0)$ bagi sistem tersebut dan tentukan kestabilannya.

(50 markah)

6. Diberi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (y - x)^2$$

$$y(0) = 0.5 \quad (I)$$

- (a) Dengan menggunakan penggantian $y = x + z$, tunjukkan bahawa masalah nilai awal tersebut dapat diturunkan kepada

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$z(0) = 0.5 \quad (II)$$

Selesaikan masalah nilai awal (II) dan dengan itu tunjukkan penyelesaian tepat bagi masalah (II) ialah

$$y(x) = x + \frac{1}{(2 - x)}$$

(50 markah)

- (b) Gunakan kaedah Euler untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi masalah nilai awal (I) di titik-titik $x_1 = \frac{1}{N}$, $x_2 = \frac{2}{N}$, ..., $x_N = 1$ dengan $N = 10$. Bandingkan penyelesaian hampiran dengan penyelesaian tepat dalam (a) dan dapatkan ralat penyelesaian di titik $x = 1$ sehingga tiga titik perpuluhan.

(50 markah)

- ooo0ooo -

