UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

JIM 315/411 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

...2/-

1. (a) (i) A, B, dan C adalah set. Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, buktikan $A \sim C$.

(ii) Jika $P \sim \mathbb{Z}$, adalah set P terbilangkan? Beri alasan.

(iii) Jika set T terbilangkan, set S tak terbilangkan dan $T \subset S$, buktikan bahawa set $S \setminus T$ adalah masih tak terbilangkan.

(70 markah)

(b) Perhatikan bahawa bagi sebarang $S \subset \mathbb{R}$,

$$a \in \overline{S} \Leftrightarrow \text{wujud jujukan } \{a_n\} \subset S \text{ yang menumpu ke a.}$$

Andaikan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $A \subset \mathbb{R}$. Dengan menggunakan sifat di atas, buktikan

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

(30 markah)

2. (a) $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ merupakan jujukan yang bersifat $x_1 < x_2$ dan

$$x_{n+1} - x_n \geq 2(x_n - x_{n-1}), \ \forall\, n \geq 2.$$

(i) Buktikan dengan aruhan matematik bahawa

$$x_{n+1} - x_n \geq 2^{n-1}(x_2 - x_1), \ \forall\, n \geq 2.$$

(ii) Adakah $\{x_n\}$ menokok? Berikan alasan.

(iii) Adakah $\{x_n\}$ menumpu? Berikan alasan.

(70 markah)

(b) Andaikan fungsi f dan g selanjar pada selang $[a, b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b g$. Buktikan bahawa wujud $c \in (a, b)$ supaya $f(c) = g(c)$.

(30 markah)

3. (a) Diberi set $S = (1, 24) \cup \{30\}$.

(i) Cari set pedalaman S°.

(ii) Cari set titik had S'.

(iii) Adakah set S terbuka? Berikan alasan.

(iv) Adakah S terkait? Berikan alasan.

(45 markah)

(b) Katakan fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Adalah set $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1 \}$ tertutup atau terbuka? Berikan alasan.

(ii) Jika $f(a) > 0$, buktikan bahawa wujud $\delta > 0$ supaya

$$f(x) > 0, \ \forall x \in J(a ; \delta).$$

(iii) Jika $f(b) < g(b)$, tunjukkan bahawa wujud $\varepsilon > 0$ supaya

$$f(x) > g(x), \ \forall x \in J(b ; \varepsilon).$$

(55 markah)

4. (a) Diberi $A_n = \left[-\frac{n^3}{1+n}, \frac{1}{1+n} \right], \ n \in \mathbb{N}$.

Cari $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(30 markah)

(b) Jika pernyataan berikut benar buktikannya dan jika ia salah sangkalkannya dengan satu contoh lawan.

"Jika jujukan $\{ a_n \}$ mencapah, maka setiap subjujukannya juga mencapah.

(30 markah)

(b) Jujukan fungsi $\{ f_n \}$ ditakrifkan sebagai

$$f_n(x) = (\cos x)^n, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

(i) Cari $\underset{n \to \infty}{\text{had}} f_n(x)$.

(ii) Adakah $\{ f_n \}$ menumpu secara seragam pada $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$? Berikan alasan.

(40 markah)

5. (a) Buktikan bahawa tidak wujud nombor nisbah x yang memenuhi persamaan $x^2 = 2$.

(40 markah)

(b) Diberi nombor a dan ε dengan $a > \varepsilon > 0$. Buktikan bahawa hanya terdapat bilangan terhingga banyaknya $n \in \mathbb{N}$ yang bersifat

$$\frac{1}{n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

(30 markah)

(c) Andaikan $A \subset \mathbb{R}$ dan $b \in \mathbb{R}$. Jika $b \in A'$ dan b suatu batas bawah bagi set A, buktikan bahawa $b = \inf A$.

(30 markah)

6. (a) Diberi fungsi $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x \in [0, 3] \cap Q \\ 4 , & x \in [0, 3] \setminus Q \end{cases} .$$

$P = \{ x_o , x_1, ..., x_n \}$ merupakan sebarang petak pada selang $[0, 3]$.

(i) Cari hasil tambah atas $A(P ; f)$ dan hasil tambah bawah $B(P ; f)$.
(ii) Cari kamiran atas $A(f)$ dan kamiran bawah $B(f)$.
(iii) Adakah f terkamirkan pada $[0, 3]$? Berikan alasan.

(45 markah)

(b) (i) Dengan menggunakan takrif keselanjaran secara seragam, buktikan bahawa fungsi $f(x) = x^2$ adalah selanjar secara seragam pada selang $(1, 10)$.

(ii) "Jika fungsi g selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$, maka g mempunyai maksimum pada $\mathbb{R}$."

Jika pernyataan ini benar buktikannya dan jika ia salah sangkalnya dengan memberikan satu contoh lawan.

(55 markah)

- ooo0ooo -