

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semasa Kursus Cuti Panjang  
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

JIM 213 - Persamaan Pembezaan 1

Masa : [3 jam]

---

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Pilih dan jawab LIMA soalan sahaja.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Setiap soalan diperuntukkan 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

---

Peringatan: Sila pastikan bahawa anda telah menulis angka giliran dengan betul.

...2/-

1. (a) Selesaikan persamaan pembezaan berikut:

(i)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}$

(ii)  $(1 + x) \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1 + x}$

(60 markah)

(b) Tunjukkan persamaan pembezaan

$$(y^4 + 2y) dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x) dy = 0$$

tidak tepat. Cari faktor pengkamir dan seterusnya selesaikan persamaan pembezaan tersebut.

(40 markah)

2. (a) Tunjukkan  $y_1 = x$  dan  $y_2 = x \ln x$  adalah penyelesaian untuk persamaan pembezaan

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

Dengan menggunakan kaedah variasi parameter, cari penyelesaian khusus bagi persamaan tersebut.

(60 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah koefisien belum tentu, cari bentuk penyelesaian khusus bagi persamaan tak homogen berikut:

(i)  $y'' - y - 2y = 6x + 6e^{-x}$

(ii)  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

Penyelesaian lengkap tak diperlukan.

(40 markah)

3. (a) Andaikan  $y_1(x)$  dan  $y_2(x)$  adalah dua penyelesaian bagi persamaan pembezaan

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Tunjukkan bahawa Wronskian

$$W(x) = W[y_1, y_2] = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

memenuhi persamaan pembezaan peringkat pertama

$$\frac{dW}{dx} = P(x)W = 0.$$

(45 markah)

- (b) Selesaikan masalah nilai awal berikut

$$\begin{aligned} 2y'' - 2y' + y &= 0 \\ y(0) &= -1, \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

(55 markah)

4. (a) Jelmaan Laplace bagi fungsi  $f(t)$  ditakrifkan oleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Dengan menggunakan takrifan ini, cari jelmaan Laplace bagi fungsi  $f(t)$  yang ditakrifkan oleh

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

(30 markah)

...4/-

(b) Dengan menggunakan kaedah Jelmaan Laplace, selesaikan

$$y'' + 3y' + 2y = 2 \sin 2t$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Anda boleh guna jadual 1 untuk mencari jelmaan Laplace yang diperlukan.

f(t)	F(s) = $\mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n, n = 0, 1, 2,$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\cos wt$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
$\sin wt$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$

Jadual 1.

(70 markah)

5. (a) Diberi  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - w)\} = e^{wt}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

Dengan menggunakan jadual 1 dan teorem konvolusi, deduksikan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}\right\} = \frac{1}{2w^3} (\sin wt - wt \cos wt)$$

Dengan ini, cari

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 2s + 5)^2}\right\}.$$

(50 markah)

...5/-

(b) Pertimbangkan sistem persamaan pembezaan

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika diberikan

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

- (i) tentusahkan  $X_1(t)$  dan  $X_2(t)$  adalah penyelesaian bagi sistem berkenaan,
- (ii) cari Wronskian  $W[X_1, X_2]$ ,
- (iii) tunjukkan syarat

$$c_1 X_1(0) + c_2 X_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tidak boleh ditepati untuk sebarang pemilihan  $c_1$  dan  $c_2$ . Kenapa?

(50 markah)

...6/-

6. Diberi matriks

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- (i) Tunjukkan  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  adalah suatu vektor Rigen.
- (ii) Tunjukkan  $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  adalah vektor eigen untuk nilai pemalar sebarang  $\alpha, \beta$ .
- (iii) Nyatakan nilai eigen bagi setiap kes (i) dan (ii) berkenaan.
- (iv) Tuliskan matriks penyelesaian asas  $\Psi(t)$  bagi sistem  $\frac{dX}{dt} = AX$ , dengan matriks A seperti yang diberi di atas.

(100 markah)

- ooo0ooo -