UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

JIF 313 - Analisis Berangka

Masa: [3 jam]

---

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 20 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

---

Peringatan: Sila pastikan bahawa anda telah menulis angka giliran dengan betul.

1. (a) Lakarkan graf bagi fungsi f yang diberi oleh $f(x) = 2x^2e^{-x}$.

(3 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah separuh selang dapatkan punca-punca persamaan

$$2x^2e^{-x} = 1$$

jitu sehingga 1 tempat perpuluhan.

(4 markah)

(c) Untuk setiap punca-punca di atas, tuliskan skema lelaran titik tetap, $x_{k+1} = g(x_k)$, yang akan menumpu ke punca yang berkenaan.

(5 markah)

(d) Dalam setiap kes (c) anggarkan bilangan lelaran yang diperlukan untuk memperolehi punca jitu ke 10 tempat perpuluhan.

(4 markah)

(e) Tuliskan suatu algoritma untuk mendapatkan punca bagi persamaan di dalam (b) dengan kaedah Newton-Raphson.

(4 markah)

2. (a) Katakan

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \text{ dan } L = \begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \end{bmatrix}.$$

Jika $A = LL^T$, tuliskan $\ell_i$ $(i = 1, 2, ..., 6)$ dalam sebutan pemasukan A. Dengan cara ini, selesaikan sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(10 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah penghapusan Gauss dengan aritmetik dua digit, selesaikan

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dapatkan penyelesaian yang lebih baik dengan menjalani dua lelaran kaedah pembaikan lelaran dengan aritmetik dua digit.

(10 markah)

3. (a) Sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

diselesaikan dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel. Diketahui bahawa penyelesaian hampiran selepas 4 lelaran ialah

$$[0.4941,\ 0.7471, 0.2471, 0.4985]^T.$$

Kira penyelesaian hampiran pada lelaran ke 5. Juga kira $\left\| \underline{x}^{(5)} - \underline{x}^{(4)} \right\|_\infty$ dan $\left\| \underline{x}^{(5)} - \underline{x}^{(4)} \right\|_2$.

Tuliskan suatu algoritma yang kemas bagi kaedah Gauss-Seidel untuk penyelesaian sistem di atas.

(10 markah)

(b) Pertimbangkan jadual yang berikut:

| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.90484 | 0.81873 | 0.74082 | 0.67032 |

Dengan membezakan dua kali rumus beza Newton-Gregory, nilaikan f''(0.12) dan f''(0.2). Kesemua titik data di atas hendaklah digunakan.

(10 markah)

4. (a) Nilaikan

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

dengan menggunakan kaedah Romberg sehingga kejituan 5 digit bererti. Mula dengan saiz subselang = 1. Bandingkan dengan jawapan yang tepat.

(10 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah $\frac{3}{8}$ – Simpson, anggarkan nilai bagi kamiran bagi

$$\int_{1.1}^{1.7} \ln x \, dx$$

sehingga 4 tempat perpuluhan. Gunakan 6 subselang. Anggarkan ralat sejagat yang terlibat.

(10 markah)

5. (a) Diberi jadual beza bagi f(x) = ln x pada titik-titik x = 800, 820, 840 dan 860 berikut:

| x | f(x) | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| 800 | 6.68461 | | | |
| | | 0.02469 | | |
| 820 | 6.70930 | | -0.00059 | |
| | | 0.02410 | | -0.00116 |
| 840 | 6.73340 | | - 0.00057 | |
| | | 0.02353 | | |
| 860 | 6.75693 | | | |

Nilai hampiran bagi f(812) diperolehi dengan menginterpolasikan kesemua titik yang diberi melalui kaedah Newton-Gregory beza ke depan. Kira anggaran ralatnya.

(7 markah)

(b) Jika $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, tunjukkan bahawa

$$\Delta^2 f(x) = 2a_2 h^2,$$

dengan $h = x_{i+1} - x_i$.

(6 markah)

(c) Buktikan bahawa

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, L_j(x)$$

dengan $L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \dfrac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$

menginterpolasikan $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(7 markah)

**Rumus-Rumus Penting**

**Persamaan Tak Linear**

1. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

2. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$

**Sistem Persamaan Linear**

3. $\dfrac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \dfrac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|} \le \dfrac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \le \|A\|\|A^{-1}\| \dfrac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|}$

4. $\dfrac{\|\underline{x} - \bar{\underline{x}}\|}{\|\bar{\underline{x}}\|} \le k(A) \dfrac{\|E\|}{\|A\|}$

5. $\dfrac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \le k(A) \dfrac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$

**Interpolasi Polinomial**

6. $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x)$ , $L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{n} \dfrac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$

7. $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_o)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

8. $P_n(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \dfrac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \cdots + \dfrac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!} \Delta^m f_0$ .

9. $R_n(x) = \dfrac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(n+1)!} \; h^{n+1} \, f^{(n+1)} \, (\xi)$

10. $P_n(x) = f_0 + q\Delta f_{-1} + \dfrac{q(q+1)}{2!} \, \Delta^2 f_{-2} + \cdots + \dfrac{q(q+1)(q+2) \cdots (q+n-1)}{n!} \, \Delta^n f_{-n}$

atau

$$P_n(x) = f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!} \, \nabla^2 f_n + \cdots + \frac{q(q+1) \cdots (q+n-1)}{n!} \, \nabla^n f_n$$

11. $f[x_0 \, , \, x_1 \, , \ldots, \, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

12. $P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) \, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \, f[x_0, x_1, x_2]$

$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \, .$$

13. $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \; f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]$

14. $f'(x) = \dfrac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \dfrac{2q-1}{2} \, \Delta^2 f_0 + \dfrac{3q^2 - 6q + 2}{6} \, \Delta^3 f_0 + \ldots\right]$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (q-1)\Delta^3 f_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12} \, \Delta^4 f_0 + \ldots\right]$$

15. $R_n'(x) = h^{n+1} \, f^{(n+1)}(\xi)\left[\dfrac{d}{dq}\binom{q}{n+1}\right]\dfrac{1}{h} + \binom{q}{n+1} h^{n+1} \, \dfrac{d}{dx} \, f^{(n+1)}(\xi)\, .$

Jika $q = 0$,

$$R_n'(x) \simeq \frac{(-1)^n}{h} \, \frac{\Delta^{n+1} f_0}{n+1}$$

16. $$F[h] = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$f'(x_0) \simeq F[h_0]$$

$$f'(x_0) \simeq F_1\left[\frac{h_0}{2}\right] = \frac{2^2 F\left[\frac{h_0}{2}\right] - F[h_0]}{2^2 - 1}$$

$$f'(x_0) \simeq F_2\left[\frac{h_0}{4}\right] = \frac{2^4 F_1\left[\frac{h_0}{4}\right] - F_1\left[\frac{h_0}{2}\right]}{2^4 - 1}$$

$$f'(x_0) \simeq F_3\left[\frac{h_0}{8}\right] = \frac{2^6 F_2\left[\frac{h_0}{8}\right] - F_2\left[\frac{h_0}{4}\right]}{2^6 - 1}$$

17. $$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

Ralat sejagat $= -\dfrac{1}{12}(b-a)\, h^2 f''(\xi)$

18. $$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{3}h\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

Ralat sejagat $= -\dfrac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$.

19. $$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{3}{8}h\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \ldots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right)$$

Ralat sejagat $= -\dfrac{1}{80}h^4 f^{(4)}(\xi)$.

20. $I \simeq T[h_0] = \frac{1}{2} h_0 \left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$

$$I \simeq T_1\left[\frac{h_0}{2}\right] = \frac{2^2\, T\left[\frac{h_0}{2}\right] - T[h_0]}{2^2 - 1}$$

$$I \simeq T_2\left[\frac{h_0}{4}\right] = \frac{2^4\, T_1\left[\frac{h_0}{4}\right] - T_1\left[\frac{h_0}{2}\right]}{2^4 - 1}$$

$$I \simeq T_3\left[\frac{h_0}{8}\right] = \frac{2^6\, T_2\left[\frac{h_0}{8}\right] - T_2\left[\frac{h_0}{4}\right]}{2^6 - 1}$$

- ooo0ooo -