UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1994/95

Mei/Jun 1995

JIM 514 - Aljabar Moden

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON

- Sila pastikan bahawa kertas ujian ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan ujian ini.

- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

- Setiap jawapan mesti diberi di dalam buku jawapan yang disediakan.

...2/-

1. (a) Buktikan bahawa,

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

(30 markah)

(b) Hubungan H ditakrifkan atas $\mathbb{Z}$, set semu integer sebagai

xHy $\Leftrightarrow$ x membahagikan y, $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z}$.

Tunjukkan bahawa H transitif.

(20 markah)

(c) Tentukan, sama ada hubungan K refleksif, simetri atau transitif jika ianya ditakrifkan atas $\mathbb{R}$, set semua nombor nyata dengan

$$xKy \Leftrightarrow x - y \leq 1 \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

(30 markah)

(d) Cari set semua integer x yang memenuhi $2x \equiv 4 \pmod 6$.

(20 markah)

2. (a) Andaikan A = {1,2,3,4} dan B = {1,2,3,4,5,6}. Nyatakan bilangan fungsi satu-ke-satu dari A ke B.

(10 markah)

(b) Andaikan $\mathbb{R}$ sebagai set semua nombor nyata. Buktikan bahawa fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang ditakrifkan oleh

$$xf = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 3 \\ x^2 - 2, & x > 3 \end{cases}$$

adalah fungsi satu-ke-satu dan keseluruh. Nyatakan songsangannya. Apakah yang boleh kamu katakan tentang fungsi gubahan, $f \circ f$? Perjelaskan jawapan kamu.

(60 markah)

(c) Jika A suatu set terhingga dan $f : A \to A$ suatu fungsi satu-ke-satu, buktikan bahawa f adalah keseluruh.

(30 markah)

...3/-

3. (a) Andaikan $\mathbb{Z}$ sebagai set semua integer. Andaikan f dan g sebagai fungsi dari Z ke $\mathbb{Z}$ yang ditakrifkan oleh

$$xf = 2x \ , \ x \in \mathbb{Z}$$

dan $$xg = \frac{1}{4}\,[1 + (-1)^x]\,x, \ x \in \mathbb{Z}.$$

Buktikan bahawa fungsi gubahan f∘g adalah fungsi identiti atas Z tetapi fungsi gubahan g∘f bukan fungsi identiti.

(25 markah)

(b) Andaikan $\mathbb{R}$ sebagai set semua nombor nyata dan * sebagai operasi dedua atas $\mathbb{R}$ yang ditakrifkan oleh

$$x * y = |x|\,y \ , \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Buktikan bahawa * adalah kalis sekutuan tetapi tidak kalis tukar tertib.

(25 markah)

(c) Jika $< G, * >$ adalah suatu kumpulan yang mempunyai tiga unsur, buktikan bahawa G adalah kumpulan abelan dengan berpandukan kepada sifir Cayley bagi kumpulan ini.

(30 markah)

(d) Andaikan $< G, * >$ adalah suatu kumpulan dengan e sebagai unsur identiti. Jika $a, b \in G$ dan $a^2 = b^2 = (a * b)^2 = e$, buktikan bahawa $a * b = b * a$.

(20 markah)

4. (a) Andaikan $G = \mathbb{R} - \{ 0 \}$, set semua nombor nyata tidak sifar. Ditakrifkan operasi * atas G sebagai $a * b = 1 + ab \ \forall\, a, b \in G$. Buktikan bahawa $< G, * >$ bukan kumpulan.

(20 markah)

(b) Jika M dan N merupakan dua subkumpulan kepada kumpulan G, andaikan $MN = \{x \in G \mid x = mn, m \in M, n \in N\}$. Buktikan bahawa $MN = NM$ jika dan hanya jika MN adalah subkumpulan kepada G.

(40 markah)

...4/-

(c) Berikan takrif pilihatur genap. Adakah pilihatur $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(1\ 2)(7\ 1\ 5\ 8)$ ganjil atau genap? Nyatakan peringkatnya.

(30 markah)

(d) Nyatakan bilangan unsur bagi A_3, kumpulan selang-seli berdarjah 3.

(10 markah)

5. (a) Nyatakan pernyataan yang BENAR dan yang PALSU.

(i) Setiap pilihatur adalah kitar.

(ii) Setiap kitar adalah pilihatur.

(iii) A_5, kumpulan selang-seli berdarjah 5 mengandungi 120 unsur.

(iv) A_4, kumpulan selang-seli berdarjah 4 adalah kumpulan abelan.

(v) Set semua pilihatur ganjil dalam S_3 adalah kumpulan.

(25 markah)

(b) Andaikan $\mathbb{C}$ sebagai kumpulan nombor kompleks, dan $\mathbb{R}$ sebagai kumpulan nombor nyata, kedua-duanya dengan penambahan sebagai operasi dedua. Ditakrifkan $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sebagai $(a + ib)\varphi = a + b$. Tentukan, sama ada φ suatu homomorfisma. Jika ya, dapatkan intinya.

(30 markah)

(c) Berikan suatu contoh lawan untuk mempertikaikan pernyataan ini:

Jika G suatu kumpulan kitar, maka setiap unsur selain dari identiti menjanakan G.

(30 markah)

(d) Jika M dan N merupakan dua subkumpulan normal bagi kumpulan G, buktikan bahawa $M \cap N$ juga adalah normal dalam G.

(15 markah)

6. (a) Jika H dan K adalah dua subgelanggang bagi gelanggang G, buktikan bahawa $H \cap K$ juga adalah subgelanggang bagi G.

(25 markah)

(b) Jika H dan K adalah dua unggulan bagi gelanggang R, buktikan bahawa $H \cap K$ juga adalah unggulan bagi R.

(25 markah)

(c) Jika R adalah suatu gelanggang dengan $x^2 = x \ \forall \ x \in R$, buktikan bahawa R kalis tukar tertib.

(25 markah)

(d) Andaikan $\mathbb{R}$ sebagai set semua nombor nyata.

Andaikan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ dengan penambahan dan pendaraban matriks sebagai operasi atas M dan $f : M \to \mathbb{R}$ sebagai fungsi yang ditakrifkan sebagai

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} f = b.$$

Buktikan bahawa f adalah suatu homomorfisma gelanggang. Dapatkan Inti f.

(25 markah)

- oooOooo -