UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan

Sidang Akademik 1994/95

Mei/Jun 1995

JIM 312 - Teori Kebarangkalian

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

...2/-

1. (a) Seekor kera diajar mengenali warna dengan melempar sebiji bola hitam, sebiji bola putih dan sebiji bola merah ke dalam kotak yang sama warna. Jika kera tersebut belum mengenali warna, maka ia akan melemparkan bola-bola tersebut secara rawak. Katakan terdapat tiga buah kotak setiap satu berwarna hitam, putih dan merah. Berapakah kebarangkalian

   (i) tiada terdapat kesesuaian warna di antara bola dan kotak?

   (ii) tepat satu kesesuaian warna bola dan kotak?

(40 markah)

(b) Diberikan $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Tunjukkan

   (i) $m_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, t < \lambda.$

   (ii) $E(X) = n/\lambda$ dan $Var(X) = n/\lambda^2$.

   (iii) $E\left(X^r\right) = \frac{\Gamma(r+n)}{\lambda^r \Gamma(n)}$. Gunakan kaedah aruhan.

(60 markah)

2. (a) Pada masalah-masalah berikut nyatakan taburan diskrit yang sesuai untuk dimodelkan. Seterusnya selesaikan masalah-masalah ini.

   (i) Kebarangkalian sebuah enjin rosak buat kali pertama selepas sejam ialah 0.01. Berapakah kebarangkalian enjin tersebut dapat bertahan selama 3 jam?

   (ii) Sebuah produk dibungkuskan di dalam lot-lot yang mempunyai 20 butiran. Bagaimanapun pengujian butiran yang cacat amat mahal dan ini menyebabkan kaedah pensampelan terpaksa digunakan. Kaedah pensampelan tersebut melibatkan pemilihan secara rawak 5 butiran setiap kotak. Sesuatu bungkus akan disyaki mempunyai butiran cacat jika lebih daripada 1 butiran yang disampel cacat. Seterusnya lot tersebut akan disingkir. Jika sesuatu lot itu mengandungi 6 butiran yang cacat, berapakah kebarangkalian yang lot tersebut akan disingkir?

...3/-

(iii) Suatu sistem rondaan secara rawak dicipta supaya seorang pegawai polis melawati sesuatu lokasi sebanyak X = 0,1,2,3, ... kali setiap jangka masa 1/2 jam. Sistem ini juga dicipta agar dia akan berada di setiap lokasi pada purata sekali di dalam jangka masa tersebut. Berapakah kebarangkalian yang pegawai tersebut tidak berada di lokasi yang tertentu di dalam jangka masa 1 jam?

(60 markah)

(b) Diberikan $f_1(x,y)$ adalah fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi $N(0,0,1,1,0)$ dan $f_2(x,y)$ adalah fungsi yang sama bagi $N(0,0,1,1,\rho)$. Sekiranya (X, Y) adalah pembolehubah rawak bivariat yang mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum.

$$f(x, y) = \frac{1}{2} f_1(x, y) + \frac{1}{2} f_2(x, y).$$

Tunjukkan yang X dan Y mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian sut normal tetapi f (x, y) menjadi normal jika dan hanya jika $\rho = 0$.

(40 markah)

3. (a) X dan Y adalah pembolehubah rawak diskrit yang mempunyai fungsi jisim kebarangkalian tercantum berikut:

		X		
		-1	0	1
	-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
Y	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

(i) Hitungkan P (X < Y).

(ii) Tunjukkan X dan Y bersandar tetapi mempunyai kovarians 0.

(40 markah)

...4/-

(b) $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah sampel rawak daripada pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi jisim kebarangkalian.

X	0	1	2
px (x)	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

$0 < \theta < 1$. Diberikan $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$.

(i) Dapatkan E(X) dan Var (X).

(ii) Tunjukkan yang $P\left(\left|\overline{X}_n\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{4}$ apabila $t = \pm\left(\frac{2\sqrt{2\theta(1-\theta)}}{\sqrt{n}}\right) + 2(1-\theta)$ dengan menggunakan Teorem Chebyshev.

(iii) Gunakan Teorem Had Memusat dan tuliskan $t = h(\theta)$ daripada penghampiran $P\left(\overline{X}_n \leq t\right) = 0.05$.

(60 markah)

4. (a) X dan Y adalah pembolehubah rawak tak bersandar N (0, 1). Dapatkan juga fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum (U, V) di mana U = X + Y dan V = X - Y.

(40 markah)

(b) Sejenis fius elektronik dikeluarkan melalui 4 garisan pengeluaran (production lines). Fius-fius tersebut adalah mahal dan tidak mudah rosak. Untuk penghantaran fius-fius tersebut dibungkuskan di dalam lot sebanyak 100 unit. Pada keadaan biasa garisan pengeluaran selalunya menghasilkan 1.5% fius rosak. Katakan garisan pengeluaran nombor 1 menghadapi masalah teknikal dan ini menyebabkan ia menghasilkan 6% fius rosak. Anda bekerja di bahagian kawalan mutu dan mengsampel 3 biji fius daripada satu lot.

(i) Berapakah kebarangkalian terdapat 1 biji fius yang rosak di antara 3 biji fius yang disampel?

(ii) Diberikan sebiji fius rosak di antara 3 biji fius yang disampel,

...5/-

(iii) Diberikan sebiji fius rosak di antara 3 biji fius yang disampel, berapakah kebarangkalian yang ia dihasilkan melalui garisan pengeluaran yang lain?

(60 markah)

5. (a) X_1, X_2, X_3, X_4 dan X_5 adalah suatu sampel rawak daripada taburan seragam (0, 1).

(i) Dapatkan taburan tercantum bagi statistik tertib $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $X_{(3)}$, $X_{(4)}$ dan $X_{(5)}$.

(ii) Seterusnya deduksikan $X_{(3)}$ tertabur secara Beta (3,3).

(iii) Tunjukkan yang $X_{(5)} - X_{(3)}$ tertabur secara Beta (2,4).

(60 markah)

(b) Suatu jenama otomobil mempunyai 5 bentuk berbeza, 4 jenis enjin, 2 jenis pacuan dan 8 warna.

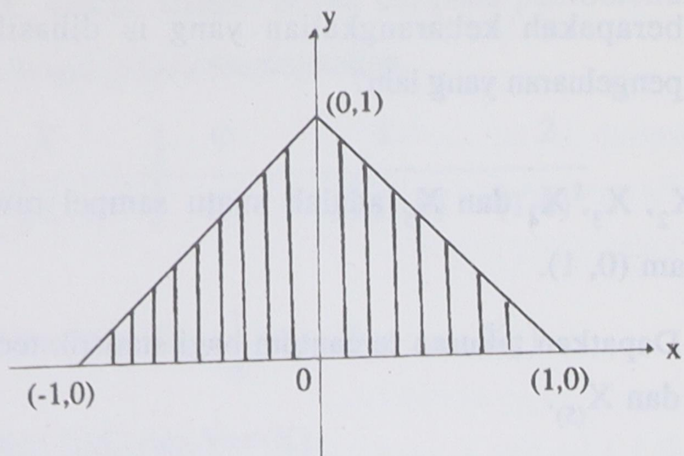
(i) Sekiranya penjual otomobil tersebut ingin mempamerkannya mengikut kombinasi bentuk-enjin-pacuan berapakah otomobil yang perlu beliau stokkan di kedai?

(ii) Jika warna dimasukkan ke dalam kombinasi di dalam (i), berapakah otomobil yang perlu beliau stokkan di kedai?

(40 markah)

6. (a) X dan Y mempunyai taburan tercantum yang seragam pada kawasan yang dilorekkan di dalam rajah berikut.

...6/-



(i) Dapatkan taburan sut X.

(ii) Dapatkan taburan sut Y.

(iii) Hitungkan $P(X-Y \geq 0)$.

(60 markah)

(b) Gunakan fungsi penjana momen untuk menyelesaikan masalah berikut:

(i) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan eksponen (λ).

Tunjukkan yang $T = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.

(ii) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan gamma (2, 1).

Tunjukkan yang $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ gamma (2n, 1).

(40 markah)

Senarai rumus

1. $\Gamma(n) = \int_0^0 x^{n-1} e^{-x} dx$

2. $\Gamma(n) = (n-1)!$

3. $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

4. $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$

5. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Bagi 6 - 8, Y_1, Y_2, ... Y_n merupakan statistik tertib bagi sampel X_1, X_2, ..., X_n.

6. $f_{Y_m}(t) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m!)}[F_X(t)]^{m-1}[1-F_x(t)]^{n-m} f_x(t)$

7. $$f_{Y_k, Y_m}(t_1,t_2) = \frac{n!}{(k-1)!(m-k-1)!(n-m)!}[f_x(t_1)]^{k-1}$$
$$[F_x(t_2)-F_x(t_1)]^{m-k-1}[1-F_x(t_2)]^{n-m}$$
$$f_x(t_1) f_x(t_2),\ t_1<t_2$$
$$k<m$$

8. $f_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = n! \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} f_x(t_i),\ t_1<t_2<\ldots<t_n$

oooo000oooo

Taburan	Parameter	Fungsi Jisim Kebarangkalian	Fungsi Penjana Momen	Min	Varians
Bernoulli	p	$p_X(x) = \begin{cases} q, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$	$pe^t + q$	p	pq
Binomial	n, p	$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ x = 0, 1, 2, \ldots n. \end{cases}$	$(pe^t + q)^n$	np	npq
Hiporgeometri	n, N, K	$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\ x = 0, 1, 2, \ldots n \end{cases}$	-	$\dfrac{nK}{N}$	$\dfrac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Geometri	p	$p_X(x) = \begin{cases} q^{x-1} p, \\ x = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$	$\dfrac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Negatif Binomial	r, p	$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\ x = r, r+1, r+2, \ldots \end{cases}$	$\left(\dfrac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{rq}{p^2}$
Poisson	λ	$p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \\ x = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ

Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian	Parameter	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ bagi $-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	$e^{(\mu t + \sigma^2 t^2/2)}$
Eksponen	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$
Gamma	$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$ $n > 0$	n/λ	n/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$, $t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$\frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2 - 1} e^{-x/2}$	$\nu = 1, 2, 3, \ldots$	ν	2ν	$\left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{\nu/2}$, $t < 1/2$
Beta	$\frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ bagi $0 < x < 1$	$a > 0$ $b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	tidak berguna

oooo000oooo