

Peperiksaan Tambahan

Sidang Akademik 1994/95

Mei/Jun 1995

JIM 213 - Persamaan Pembezaan 1

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana **LIMA** soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

1. (a) Tunjukkan bahawa fungsi μ adalah faktor pengamir bagi persamaan $M + Ny' = 0$ jika ia memenuhi persamaan pembezaan separa

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

(30 markah)

- (b) Tukarkan persamaan Bernoulli $y' + y P(x) = y^n Q(x)$ ($n \neq 0, n \neq 1$) kepada persamaan linear. Bincangkan tentang persamaan di atas apabila $n = 0$ dan $n = 1$. Seterusnya selesaikan $xy' + y = x^3 y^6$.

(40 markah)

- (c) Selesaikan

(i) $y' + y \cot x = \sin x$

(ii) $(y - x) dy + (x + y) dx = 0$

(iii) $2xydx + x^3 dy = 0$.

(30 markah)

2. (a) Cari penyelesaian khusus bagi persamaan pembezaan $y'' - 3y' + 2y = xe^x + \sin x$ dengan

(i) kaedah koefisien belum tentu

(ii) kaedah variasi parameter

(60 markah)

- (b) Cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

(20 markah)

- (c) Tunjukkan bahawa persamaan pembezaan $ay'' + by' + cy = 0$ mempunyai penyelesaian am $y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$ dengan

$$p = -\frac{b}{2a} \text{ dan } q = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \text{ jika } b^2 - 4ac < 0.$$

(20 markah)

3. (a) Selesaikan sistem persamaan berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan,

$$x' = 2x - 5y, \quad x(0) = 1$$

$$y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 1$$

(30 markah)

- (b) Cari penyelesaian am bagi sistem persamaan tak homogen

$$\tilde{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} -2t^2 \\ t+5 \end{pmatrix}$$

(35 markah)

- (c) Dengan menggunakan e^{At} , selesaikan masalah nilai awal

$$x' = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dengan } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

(35 markah)

4. (a) Jika $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = 0$ dengan $f(0) = 1$ dan $f'(0) = 2$, cari $\mathcal{L}\{f(t)\}$ dan $f(t)$.

(40 markah)

- (b) Jika $U(t-k)$ ditakrifkan oleh

$$U(t-k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq k \\ 1, & k < t, \quad k > 0, \end{cases}$$

tunjukkan

$$\mathcal{L}\{U(t-k)f(t)\} = e^{-ks} \mathcal{L}\{f(t+k)\}$$

(30 markah)

...4/-

(c) Jika $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ t-1 & , 1 \leq t < 2 \\ 1 & , t \geq 2 \end{cases}$

Dapatkan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ dan seterusnya tuliskan $f(t)$ sebagai gabungan linear dari fungsi $(t-1)U(t-1)$ dan $(t-2)U(t-2)$. (30 markah)

55. (a) Perimbangkan persamaan pembezaan dalam bentuk $[y + x f(x^2 + y^2)] dx + [y f(x^2 + y^2) - x] dy = 0$.

- (i) Tunjukkan suatu persamaan dalam bentuk seperti di atas adalah tepat.
- (ii) Tunjukkan $\frac{1}{(x^2 + y^2)}$ merupakan faktor pengamir bagi persamaan dalam bentuk di atas. (30 markah)

(b) Katakan \underline{x}_p adalah satu penyelesaian bagi sistem tak homogen $\underline{x}' = A(t)\underline{x} + \underline{g}(t)$. Tunjukkan bahawa semua penyelesaian \underline{x} bagi sistem tak homogen di atas adalah berbentuk $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{\phi}$ dengan $\underline{\phi}$ adalah penyelesaian bagi sistem homogen $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$. (30 markah)

(c) Nilakan

(i) $\mathcal{L}\{u^t \cos t\}$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3(s^2+2)}\right\}$

(40 markah)

6. (a) Dengan menggunakan teorem konvolusi, dapatkan

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+a)^2(s-b)} \right\}$$

(30 markah)

(b) Tunjukkan bahawa penyelesaian bagi persamaan $x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - xy = 0$ tertakluk kepada syarat awal $y(0) = 0$ ialah $y(x) = c \mathcal{L}^{-1} \{ (s^2 - 1)^{-3/2} \}$, c pemalar.

(40 markah)

(c) Cari tiga penyelesaian tak bersandar linear bagi sistem $\underline{x}' = A\underline{x}$ dengan

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(30 markah)

- oooOooo -