INTERPOLASI HERMITE KUINTIK DAN KEKANGAN UNTUK MENGEKALKAN SIFAT EKANADA

oleh

DAYANG SHAFIAH BINTI DATU SHAHRUN

Disertasi yang diserahkan untuk memenuhi sebahagian keperluan bagi

Ijazah Sarjana Sains Matematik

Mei 2007

PENGHARGAAN

Bersyukur saya ke hadrat Ilahi kerana dengan izin dan rahmat-Nya, dapat saya menyiapkan disertasi ini. Setinggi-tinggi penghargaan saya rakamkan buat penyelia saya iaitu Prof. Madya Jamaludin Md. Ali atas bimbingan dan tunjuk ajar beliau.

Saya juga ingin merakamkan penghargaan kepada kedua ibu bapa saya yang banyak memberikan semangat dan bantuan untuk saya meneruskan pengajian yang serba mencabar ini.

Tidak lupa buat kawan-kawan yang sedikit sebanyak memberi tunjuk ajar pada sesuatu yang kadangkala tidak difahami.

JADUAL KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

ABSTRAK

Interpolasi Hermite kuintik merupakan cara yang mudah untuk mewakilkan data-data dalam bentuk lengkung seandainya diberi terbitan pertama dan kedua pada data-data tersebut.

Namun interpolasi Hermite kuintik ini tidak semestinya mengekalkan sifat-sifat sebenar data seperti positiviti, ekanada dan kecembungan. Sifat yang telah dikaji dalam disertasi ini adalah sifat berekanada interpolasi Hermite kuintik. Jika interpolasi Hermite kuintik ini didapati tidak mengekalkan sifat berekanadanya, kekangan dilakukan. Cara mengekang interpolasi Hermite kuintik diberi perhatian dalam disertasi ini.

Penyelidikan ini memberi penekanan terhadap algoritma mengekang interpolasi Hermite kuintik yang dicadangkan oleh Dougherty, Edelman dan Hyman (1989). Dalam kajian ini akan dilihat keberkesanan algoritma mengekang interpolasi Hermite kuintik dan sejauh manakah algoritma ini menukar nilai terbitan pertama yang asal.

QUINTIC HERMITE INTERPOLATION AND CONSTRAINT TO PRESERVE MONOTONICITY

ABSTRACT

Quintic Hermite interpolation is easy to use as a representation of the behavior of given data once the first and the second derivative at a particular mesh point are known.

However, the quintic Hermite interpolation does not necessarily preserve the shape of the data. This research explores mainly about the monotonicity property. If the interpolation do not preserve the property of monotonicity, constraint should be implied so that the interpolation will preserve the property.

The main focus of this study is to find out how to apply the constraint that suggested by Dougherty, Edelman and Hyman (1989) onto the quintic Hermite interpolant. From this study, it is possible to see whether the constraint is effective and how much the original derivative will be changed by the constraint.

BAB I

PENGENALAN

1.1 PENGENALAN

Interpolan Hermite kuintik mudah digunakan untuk menginterpolasi data apabila terbitan pertama dan terbitan kedua dibekalkan untuk data-data yang diberikan. Interpolasi yang dibina daripada interpolan ini menjamin lengkung yang bercantum secara C^2 kerana interpolan Hermite kuintik tersebut dapat dibezakan sebanyak dua kali. Namun interpolasi data yang terhasil tidak semestinya menjanjikan bentuk yang menggambarkan perlakuan sebenar data. Pada interpolasi tersebut akan ada kemungkinan terdapatnya alunan atau kedutan pada lengkung dalam sesuatu selang.

Terdapat beberapa cara yang telah dikaji mengekalkan bentuk sesuatu interpolasi antaranya adalah dengan mengekang terbitan pada interpolan, menambah bilangan nod baru, menambah bilangan polinomial cebis demi cebis ataupun menaikkan darjah polinomial interpolan. Kekangan merupakan salah satu cara yang paling mendapat perhatian dalam mengekalkan bentuk sesuatu interpolasi. Tidak banyak kajian yang dijalankan mengenai kekangan yang boleh dilakukan terhadap interpolan Hermite kuintik ini. Dengan itu, disertasi ini memberikan penekanan pada kaedah kekangan untuk mengekalkan bentuk berekanada yang telah dibangunkan oleh Dougherty, et al. (1989).

Bab 2 menerangkan dengan lebih terperinci bagaimana membangunkan interpolasi Hermite kuintik jika diberikan data-data. Dalam bab ini juga disentuh mengenai cara menerbitkan interpolan Hermite kuintik dalam bentuk cebis demi cebis apabila telah diketahui fungsi-fungsi asasnya. Selain itu diterangkan juga mengenai pilihan terbitan-terbitan terhadap data sekiranya tidak diberikan terbitan-terbitan terhadap data itu.

Bab 3 secara keseluruhannya membincangkan tentang kekangan yang boleh dilakukan agar interpolasi Hermite kuintik mengekalkan sifat ekanadanya. Dalam bab ini diterangkan mengenai algoritma yang digunakan untuk mengekang terbitan dan juga langkah-langkah yang perlu dilakukan untuk mendapatkan interpolasi yang dikehendaki.

Bab 4 pula mempamerkan hasil-hasil yang didapati daripada penggunaan kekangan untuk mengekalkan ekanada interpolasi Hermite kuintik. Dalam bab ini, boleh dilihat ilustrasi hasil penggunaan algoritma yang telah dicadangkan oleh Dougherty, et al. (1989).

Dalam disertasi ini, perisian yang digunakan adalah perisian Mathematica. Ilustrasi menunjukkan keberkesanan penggunaan algoritma untuk mengekang terbitan pada interpolan Hermite kuintik turut dimuatkan dalam disertasi ini.

1.2 OBJEKTIF

Objektif utama disertasi ini adalah untuk menghasilkan interpolasi Hermite kuintik yang licin iaitu interpolasi yang tidak beralun pada sebarang selang. Interpolasi yang licin amat penting untuk memberi gambaran yang tepat mengenai perlakuan-perlakuan data yang diberikan.

Selain itu, disertasi ini juga menerangkan lebih terperinci mengenai algoritma untuk mengekang terbitan pada interpolan Hermite kuintik yang diperkenalkan oleh Dougherty, et al. (1989).

1.3 LATAR BELAKANG

Terdapat banyak cara yang telah diperkenalkan untuk menghasilkan bentuk lengkung yang lebih baik. Sifat-sifat yang perlu dikekalkan pada sesuatu interpolasi adalah positiviti atau negativiti sesuatu interpolasi, ekanada dan juga kecembungannya. Namun untuk interpolasi Hermite kuintik, tidak begitu banyak kajian yang dilakukan. Yang memberikan penerangan sejelas-jelasnya mengenai kekangan yang perlu dilakukan agar interpolasi Hermite kuintik dapat memberikan bentuk yang baik adalah melalui kajian yang dijalankan oleh Dougherty, et al. (1989).

Kajian yang selebihnya lebih banyak tertumpu kepada interpolasi kubik. Brodlie, et al. (1995) menambah satu atau lebih nod pada kawasan yang memerlukan pengekalan bentuk data. Asim dan Brodlie (2003) juga menambahkan bilangan nod pada interpolan kubik cebis demi cebis untuk mengekalkan bentuk dan juga memperkenalkan cara untuk memilih nod-nod yang sesuai. Zawwar dan Maria (2006) mengekang parameter bebas pada fungsi kubik nisbah untuk mengekalkan bentuk data yang berada di atas garis lurus.

Jing Chi, et al. (2005) pula membangunkan cara baru untuk menghasilkan lengkung komposit Hermite geometrik yang optima. Kekangan terhadap sudut tangen memastikan lengkung Hermite kubik yang terhasil adalah lengkung Hermite geometrik yang optima.

Casciola dan Romani (2004) menerangkan mengenai lengkung kelas baru yang terhasil daripada interpolasi Hermite kuintik nisbah yang mempunyai lebih banyak parameter bebas untuk mengawal bentuk lengkung menjadi bentuk lengkung yang diingini.

BAB 2

INTERPOLASI HERMITE KUINTIK

2.1 PENGENALAN

Dalam bab ini akan diterangkan mengenai interpolasi Hermite kuintik, serba sedikit mengenai sifat-sifatnya dan juga kegunaannya. Dalam bab ini juga akan disentuh bagaimana mendapatkan fungsi-fungsi asas bagi Hermite kuintik dan juga mendapatkan interpolan Hermite kuintik cebis demi cebis.

2.2 INTERPOLASI HERMITE KUINTIK

Interpolasi Hermite kuintik merupakan pengitlakan kepada interpolasi Hermite kubik. Dipetik daripada Finn (2004), interpolasi ini biasanya digunakan dalam menyelesaikan masalah susun atur gerakan dan juga dalam animasi. Sebagai contoh, laluan gerakan tangan robot boleh ditetapkan menggunakan lengkung Hermite kuintik. Sifat-sifat penting yang ada pada interpolan Hermite kuintik ini adalah jika terbitan-terbitan diketahui, adalah lebih senang untuk menggunakannya kerana mudah dikira. Interpolasi Hermite kuintik menjamin lengkung yang terhasil adalah C^2 kerana interpolannya boleh dibezakan sebanyak dua kali. Untuk menentukan lengkung Hermite kuintik, beberapa data diperlukan iaitu dua kedudukan atau titik kawalan, terbitan pertama pada titik kawalan ataupun halaju dan juga terbitan kedua pada titik kawalan ataupun pecutan. Selain daripada data-data diatas, perlu diketahui fungsi-fungsi asas bagi Hermite kuintik. Fungsi-fungsi asas ini akan didarabkan dengan data–data yang telah disebutkan untuk membina suatu lengkung Hermite kuintik.

2.3 PENENTUAN FUNGSI ASAS HERMITE KUINTIK

Memetik daripada Finn (2004), pertimbangkan persamaan kuintik secara am iaitu:

$$c(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 \qquad (2.1)$$

dan anggapkan

$$c(0) = f_0 \qquad (2.2)$$

$$c'(0) = v_0 \qquad (2.3)$$

$$c''(0) = a_0 \qquad (2.4)$$

$$c(1) = f_1 \qquad (2.5)$$

$$c'(1) = v_1 \qquad (2.6)$$

$$c''(1) = a_1 \qquad (2.7)$$

yang mana f_i untuk $i = 0, 1$ adalah nilai fungsi, v_i untuk $i = 0,1$ adalah terbitan pertama dan a_i untuk $i = 0,1$ adalah terbitan kedua. Untuk mendapatkan fungsi-fungsi asas Hermite kuintik, kita perlu menyelesaikan:

$$f_0 = b_0 \qquad (2.8)$$

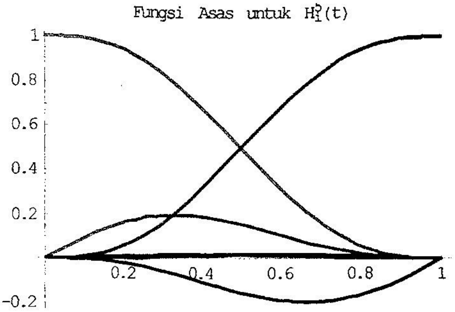
$$v_0 = b_1 \qquad (2.9)$$

$$a_0 = 2 b_2 \qquad (2.10)$$

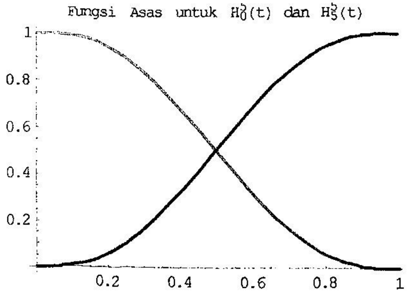
$$f_1 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 \qquad (2.11)$$

$$v_1 = b_1 + 2 b_2 + 3 b_3 + 4 b_4 + 5 b_5 \qquad (2.12)$$

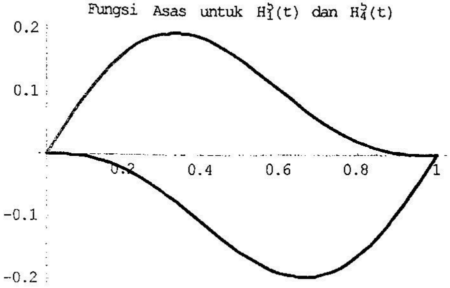
Berikut merupakan graf-graf bagi fungsi-fungsi asas untuk Hermite kuintik :



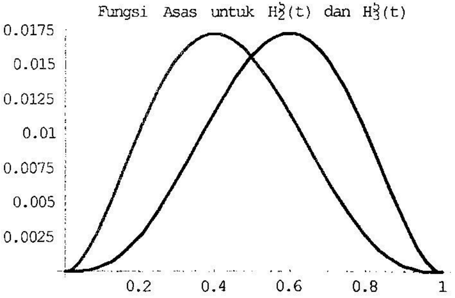
Rajah 2.1 Fungsi-fungsi asas untuk Hermite kuintik



Rajah 2.2 Fungsi-fungsi asas untuk $H_{0,5}(t)$ dan $H_{5,5}(t)$



Rajah 2.3 Fungsi-fungsi asas untuk $H_{1,5}(t)$ dan $H_{4,5}(t)$



Rajah 2.4 Fungsi-fungsi asas untuk $H_{2,5}(t)$ dan $H_{3,5}(t)$

2.4 INTERPOLAN CEBIS DEMI CEBIS HERMITE KUINTIK

Interpolan Hermite kuintik yang dibincangkan dalam bahagian yang terdahulu merupakan interpolan Hermite kuintik dalam bentuk parameter yang mana $0 \leq t \leq 1$. Dalam disertasi ini, interpolan Hermite kuintik yang digunakan adalah seperti yang dipetik daripada Dougherty, et al. (1989) yang mana interpolasi Hermite kuintik yang akan terhasil adalah interpolasi cebis demi cebis. Interpolan Hermite kuintik cebis demi cebis dinyatakan seperti berikut :

$$q(x) = c_0 + c_1 \delta + c_2 \delta^2 + c_3 \delta^3 + c_4 \delta^4 + c_5 \delta^5 \qquad (2.21)$$

Untuk $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, yang mana

$$c_0 = f_i \qquad (2.22)$$

$$c_1 = v_i \qquad (2.23)$$

$$c_2 = \frac{a_i}{2} \qquad (2.24)$$

$$c_3 = \frac{a_{i+1} - 3\,a_i}{2\,(x_{i+1} - x_i)} + \frac{2\left(5\,\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} - 3\,v_i - 2\,v_{i+1}\right)}{(x_{i+1} - x_i)^2} \qquad (2.25)$$

$$c_4 = \frac{3\,a_i - 2\,a_{i+1}}{2\,(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{\left(8\,v_i + 7\,v_{i+1} - 15\,\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right)}{(x_{i+1} - x_i)^3} \qquad (2.26)$$

$$c_5 = \frac{a_{i+1} - a_i}{2\,(x_{i+1} - x_i)^3} + \frac{3\left(2\,\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} - v_i - v_{i+1}\right)}{(x_{i+1} - x_i)^4} \qquad (2.27)$$

dengan

$$\delta = x - x_i \tag{2.28}$$

Interpolan Hermite kuintik yang digunakan oleh Dougherty, et al. (1989) boleh diperolehi daripada persamaan (2.14) melalui cara yang diterangkan oleh Cohen, et al. (2001).

Sebelum itu, dianggapkan

$$q(x) = Q_i(x), \; x_i \le x \le x_{i+1} \tag{2.29}$$

Q_i boleh ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} Q_i(x) = & \; f_i \, H_0^5(p_i(x)) + v_i\,(x_{i+1} - x_i)\, H_1^5(p_i(x)) \\ & + a_i\,(x_{i+1} - x_i)^2\, H_2^5(p_i(x)) + a_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i)^2\, H_3^5(p_i(x)) \\ & + v_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i)\, H_4^5(p_i(x)) + f_{i+1}\, H_5^5(p_i(x)) \end{aligned} \tag{2.30}$$

yang mana

$$p_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{2.31}$$

Apabila $Q_i\,(x)$ dikembangkan dan koefisien bagi $(x\text{-}x_i)^n$ untuk $n = 1, \ldots, 5$ dikumpulkan, maka akan terhasil interpolan Hermite kuintik seperti (2.21).

Jika diberi data x_i dan $f(x_i)$, untuk $i = 0, 1, \ldots, n$, maka data tersebut dapat diinterpolasikan menggunakan interpolan Hermite kuintik (2.21) dengan syarat terbitan pertama dan terbitan kedua untuk setiap data diberikan. Jika terbitan-terbitan tidak diberikan, maka perlulah terbitan-terbitan tersebut dianggarkan menggunakan kaedah–kaedah yang sesuai. Interpolan Hermite kuintik yang diberikan pada (2.21) tidak semestinya menjamin pengekalan bentuk berekanada sesuatu interpolasi. Maka langkah-

langkah berikut perlu diambil untuk mendapat interpolasi yang akan mengekalkan sifat ekanadanya:

- anggarkan terbitan-terbitan pada data menggunakan kaedah yang disarankan oleh Dorn dan McCracken (1972). Terdapat juga kaedah lain yang boleh digunakan untuk menentukan terbitan-terbitan pada data.
- Interpolasikan data-data menggunakan interpolan Hermite kuintik seperti yang disarankan oleh Dougherty, et al. (1989).
- Jika pada sesuatu selang sifat berekanada tidak terpelihara, maka perlu dilakukan kekangan terhadap interpolan Hermite kuintik tersebut menggunakan kekangan yang juga telah disarankan oleh Dougherty, et al. (1989). Kekangan akan dilakukan terhadap terbitan pertama pada data yang mana selangnya terjejas paling teruk. Terdapat juga cara lain yang boleh digunakan untuk mengekang interpolasi Hermite kuintik agar mengekalkan sifat berekanadanya.

2.5 PEMILIHAN TERBITAN

Jika diberikan data-data x_i dan $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ dan terbitan-terbitan pada data-data tersebut tidak diketahui, maka terbitan-terbitan pada data tersebut boleh dianggarkan melalui kaedah berangka yang dicadangkan oleh Dorn dan McCracken (1972). Terbitan yang dicadangkan ini boleh digunakan untuk mencari terbitan bagi data-data yang berjarak tidak seragam. Diberi $x_{i-1} \le x_i \le x_{i+1}$, $h_1 = x_i - x_{i-1}$ dan $h_2 = x_{i+1} - x_i$.

Maka terbitan pertama pada x_i seperti yang dipetik daripada Dorn dan McCracken (1972) adalah seperti berikut:

$$f'(x_i) = \frac{-h_2^2\ f(x_{i-1}) + (h_2^2 - h_1^2)\ f(x_i) + h_1^2\ f(x_{i+1})}{h_1\, h_2\, (h_1 + h_2)} \qquad (2.32)$$

Terbitan kedua pada x_i yang ditentukan menggunakan kaedah yang dipetik daripada Dorn dan McCracken (1972) adalah seperti berikut:

$$f''(x_i) = \frac{2\,(h_2\ f(x_{i-1}) - (h_1 + h_2)\ f(x_i) + h_1\ f(x_{i+1}))}{h_1\, h_2\, (h_1 + h_2)} \qquad (2.33)$$

BAB 3

KEKANGAN TERHADAP INTERPOLASI HERMITE KUINTIK UNTUK MENGEKALKAN SIFAT EKANADA

3.1 PENGENALAN

Dalam bab ini dibincangkan mengenai sifat ekanada Hermite kuintik dan juga kekangan yang dikenakan terhadap interpolan Hermite kuintik.

3.2 SIFAT EKANADA HERMITE KUINTIK

Suatu interpolan P(x) dikatakan berekanada secara cebis demi cebis sekiranya terbitan pada x tidak berubah tanda dalam mana-mana selang (x_i, x_{i+1}). Pengekalan sifat ini amat penting kerana interpolan yang mengekalkan sifat ini akan menghasilkan interpolasi yang licin diantara data-data. Interpolan tidak akan menghasilkan interpolasi yang beralun dan seterusnya memberi gambaran yang betul tentang perlakuan data-data. Sebagaimana yang dipetik daripada Dougherty, et al. (1989), interpolan Hermite kuintik adalah berekanada jika memenuhi beberapa syarat yang ditetapkan.

Diberikan data secara rawak $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ dan nilai fungsi $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Dougherty, et al. (1989) menganggapkan q sebagai interpolan Hermite kuintik bagi data-data tersebut. Jika $f_i \neq f_{i+1}$, biarkan

$$g_i(t) = \frac{q((x_{i+1} - x_i)t + x_i) - f_i}{f_{i+1} - f_i} \tag{3.1}$$

dimana $0 \le t \le 1$, $g_i(t)$ tertakrif pada [0,1] yang mana $g_i(0) = 0$ dan $g_i(1) = 1$. $g_i(t)$ adalah bentuk ternormal bagi q. Bagi i = 0,1,...,n-1, $g_i(t)$ adalah berekanada sekiranya memenuhi dua syarat berikut:

i) $$L_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1)) \le g_i''(0) \le U_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1)) \tag{3.2}$$

dan

ii) $$L_{1,m}(g_i'(0), g_i'(1)) \le g_i''(1) \le U_{1,m}(g_i'(0), g_i'(1)) \tag{3.3}$$

yang mana

$$L_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1)) = -7.9\, g_i'(0) - 0.26\, g_i'(0)\, g_i'(1) \tag{3.4}$$

$$U_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1)) = 20 - 8\, g_i'(0) - 2\, g_i'(1) - 0.48\, g_i'(0)\, g_i'(1) \tag{3.5}$$

$$L_{1,m}(g_i'(0), g_i'(1)) = -U_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1)) \tag{3.6}$$

$$U_{1,m}(g_i'(0), g_i'(1)) = -L_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1)) \tag{3.7}$$

Syarat pada (3.2) dan (3.3) juga benar jika $g_i = 0$. $L_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1))$, $U_{0,m}(g_i'(0), g_i'(1))$, $L_{1,m}(g_i'(0), g_i'(1))$, $U_{1,m}(g_i'(0), g_i'(1))$ merupakan sempadan segiempat ruang berekanada untuk kuintik. Daripada definisi $g_i(t)$ yang telah diberikan, jika $f_i \neq f_{i+1}$ maka perkara-perkara berikut tertakrif:

$$g_i'(0) = \frac{v_i}{\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}} \tag{3.8}$$

$$g_i'(1) = \frac{v_{i+1}}{\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}} \tag{3.9}$$

$$g_i''(0) = \frac{a_i}{\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} \Big/ x_{i+1}-x_i\right)} \tag{3.10}$$

$$g_i''(1) = \frac{a_{i+1}}{\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} \Big/ x_{i+1}-x_i\right)} \tag{3.11}$$

Jika syarat yang telah dinyatakan pada (3.2) dan (3.3) tidak dipatuhi, maka interpolasi terhasil tidak berekanada. Sehubungan dengan itu, interpolan tersebut perlu dikekang agar interpolasi yang terhasil adalah berekanada. Kekangan yang dilakukan terhadap interpolan adalah berdasarkan kekangan yang dipetik daripada Dougherty, et al. (1989). Kekangan yang dilakukan adalah terhadap terbitan pertama pada x_i dan tidak melibatkan terbitan pada tempat yang lain. Kekangan hanya dilakukan pada selang yang terjejas teruk.

3.3 ALGORITMA PENGEKALAN SIFAT EKANADA

Untuk mengekalkan sifat berekanada pada interpolasi Hermite kuintik yang tidak berekanada, Dougherty, et al. (1989) memperkenalkan satu algoritma untuk mengekang terbitan pada x_i di mana syarat berekanada tidak dipatuhi.

Ruang ekanada untuk interpolan Hermite kuintik terdiri daripada ruang kompleks dalam satah hyper 4 dimensi yang terdiri daripada subset R^4 menggunakan koordinaat (v_i, a_i, v_{i-1}, a_{i+1}). Algoritma pengekalan sifat ekanada yang diperkenalkan oleh Dougherty, et al. (1989) akan membataskan terbitan supaya nilainya berada dalam ruang ekanada tersebut. Algoritma ini fungsinya serupa sebagaimana algoritma pengekalan ekanada untuk Hermite kubik yang mana terbitan pada interpolan Hermite kubik dibataskan ke dalam kotak de Boor-Swartz. Algoritma yang dicadangkan oleh Dougherty, et al. (1989) adalah seperti berikut:

$$v_i = \min\left(\text{maks }(0, v_i), 5\min\left(\left|\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right|, \left|\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right|\right)\right) \text{ jika } \sigma_i \geq 0 \tag{3.12}$$

atau

$$v_i = \text{maks}\left(\min(0, v_i), -5\min\left(\left|\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right|, \left|\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right|\right)\right) \text{ jika } \sigma_i \leq 0 \tag{3.13}$$

σ_i ditakrifkan sebagai

$$\sigma_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{jika} \quad \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right) > 0 \tag{3.14}$$

$$\sigma_i = v_i \quad \text{jika} \quad \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)\cdot\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right) < 0 \tag{3.15}$$

3.4 LANGKAH-LANGKAH MENGGUNAKAN ALGORITMA PENGEKALAN SIFAT EKANADA

Berikut merupakan langkah-langkah yang perlu dilakukan untuk mengekang terbitan pada interpolan Hermite kuintik seandainya interpolasi terhasil tidak mengekalkan sifat ekanada:-

i) bina interpolasi Hermite kuintik untuk data-data yang diberikan. Interpolasi yang dibina tidak semestinya mengekalkan bentuk.

ii) Tentukan pada selang mana interpolasi Hermite kuintik terjejas teruk. Boleh gunakan syarat (3.2) dan (3.3) untuk memeriksa samada interpolasi berekanada atau tidak. Andaikan selang yang terjejas bermula daripada titik x_i.

iii) Sekiranya tidak berekanada, tentukan kecerunan linear cebis demi cebis bagi selang yang terjejas dan juga selang yang sebelumnya. Kecerunan linear cebis demi cebis untuk $[x_i, x_{i+1}]$ ditakrifkan sebagai $s_{i+1/2}$ dan dikira menggunakan formula dibawah:

$$s_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{3.16}$$

$$s_{i-\frac{1}{2}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{3.17}$$

iv) Tentukan hasildarab kecerunan linear cebis demi cebis bagi sebelah kiri dan kanan x_i. Jika

$$\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \cdot \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right) > 0 \;, \text{ maka } \sigma_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \;,$$

dan jika

$$\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \cdot \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right) < 0 \;, \text{ maka } \sigma_i = v_i$$

v) Maka terbitan pertama akan dikekang menggunakan algoritma yang dipetik daripada Dougherty, et al. (1989) iaitu

$$v_i = \min\left(\text{maks}\,(0,\ v_i),\ 5\min\left(\left|\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right|,\ \left|\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right|\right)\right) \quad \text{jika } \sigma_i \geq 0$$

ataupun

$$v_i = \text{maks}\left(\min\,(0,\ v_i),\ -5\min\left(\left|\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right|,\ \left|\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right|\right)\right) \quad \text{jika } \sigma_i \leq 0$$

vi) Langkah terakhir adalah menukarkan nilai terbitan pertama yang baru kedalam interpolan untuk menggantikan nilai terbitan pertama yang telah dianggarkan pada awalnya.

BAB 4

CONTOH BERANGKA

4.1 CONTOH BERANGKA 1

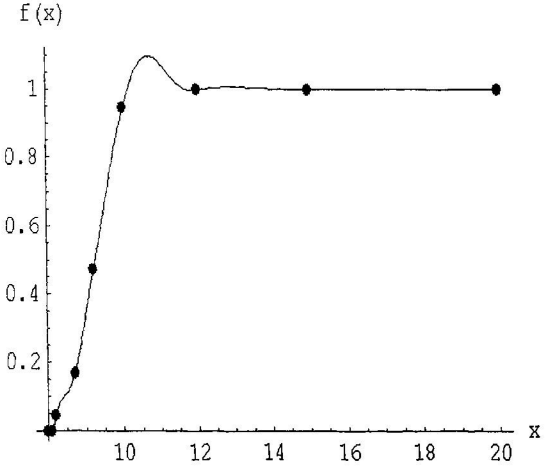
Jadual 4.1 merupakan data yang dipetik daripada Dougherty, et al. (1989). Data yang ditunjukkan dalam jadual tersebut merupakan data radiokimia Fritsch-Carlson RPN 14. Rajah 4.1 menunjukkan data yang diinterpolasi menggunakan interpolan Hermite kuintik yang belum dikekang. Manakala Rajah 4.2 menunjukkan data yang diinterpolasikan menggunakan interpolan Hermite kuintik yang telah dikekang terbitan pertamanya menggunakan algoritma yang diperkenalkan oleh Dougherty, et al. (1989). Rajah 4.3 pula menunjukkan perbezaan di antara interpolasi data sebelum dan selepas kekangan.

Jadual 4.1: Data radiokimia Fritsch-Carlson RPN 14

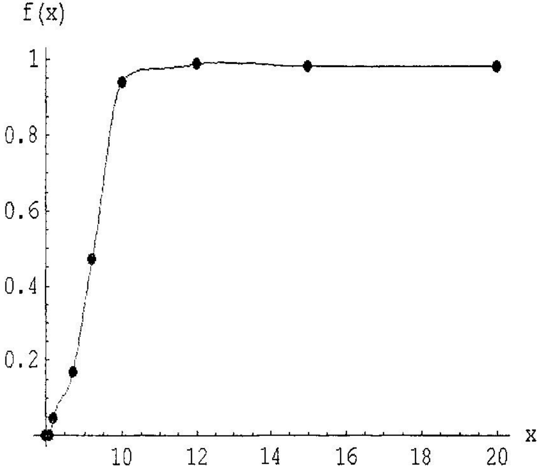
x	f(x)
7.99	0
8.09	2.76429E-5
8.19	4.37498E-2

8.7	0.169183
9.2	0.469428
10	0.943740
12	0.998636
15	0.999919
20	0.999994

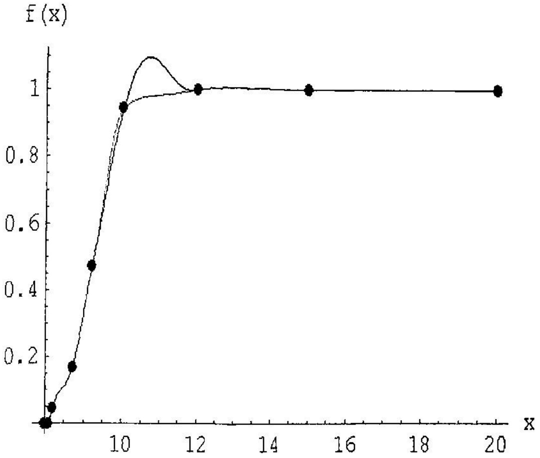
Sumber: Randall L. Dougherty, Alan Edelman dan James M.Hyman (1989)



Rajah 4.1 Interpolasi Hermite kuintik data radiokimia Fritsch-Carlson RPN 14 yang belum dikekang.



Rajah 4.2 Interpolasi Hermite kuintik data radiokimia Fritsch-Carlson RPN 14 yang telah dikekang.



Rajah 4.3 Perbezaan interpolasi Hermite kuintik yang telah dikekang dan yang belum dikekang untuk data radiokimia Fritsch-Carlson RPN 14.

Jadual 4.2 Nilai terbitan pertama sebelum dan selepas kekangan untuk data radiokimia Fritsch-Carlson RPN 14

NILAI TERBITAN PERTAMA SEBELUM DIKEKANG	NILAI TERBITAN PERTAMA SELEPAS DIKEKANG
$V_5 = 0.431335$	$V_5 = 0.13724$

4.2 CONTOH BERANGKA 2

Jadual 4.3 merupakan data tentang jumlah oksigen yang terlarut dalam sebuah tasik di Amerika Syarikat iaitu Ice Lake. Jumlah oksigen yang terlarut diukur dalam mg/l berdasarkan kedalaman. Rajah 4.4 menunjukkan data yang diinterpolasi menggunakan interpolan Hermite kuintik yang belum dikekang. Manakala Rajah 4.5 menunjukkan data yang diinterpolasikan menggunakan interpolan Hermite kuintik yang telah dikekang terbitan pertamanya menggunakan algoritma yang diperkenalkan oleh Dougherty, et al. (1989). Rajah 4.6 pula menunjukkan perbezaan diantara interpolasi data yang telah dikekang dan yang belum dikekang.

Jadual 4.3: Oksigen Terlarut Mengikut Kedalaman Di Ice Lake, AS

Kedalaman Tasik (m)	Jumlah Oksigen Terlarut (mg/l)
1.1	5.9
1.9	6.35
2.9	5.98
3.9	6.00
4.8	5.88
5.8	5.87
7.0	2.65
7.8	0.85
9.0	0.62
9.9	0.39
10.8	0.28