
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004

April 2004

JIM 317 – Persamaan Pembezaan II

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan ini.

Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

...2/-

1. Diberi persamaan pembezaan

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

- (a) Tunjukkan bahawa $x = 0$ adalah titik singular sekata.

(15 markah)

- (b) Andaikan bentuk penyelesaian siri kuasa ialah

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Dengan menggunakan Kaedah Frobenius, tunjukkan hubungan jadi semula bagi persamaan pembezaan tersebut ialah

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+r)(2n+2r-1)}, \quad n \geq 1$$

(30 markah)

- (c) Tunjukkan bahawa satu penyelesaian siri kuasa ialah

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}$$

(20 markah)

- (d) Dapatkan penyelesaian siri kuasa $y_2(x)$ yang tak bersandar linear.

(20 markah)

- (e) Nyatakan selang penumpuan bagi penyelesaian siri kuasa tersebut.

(15 markah)

2. (a) Tuliskan semula persamaan pembezaan

$$x(1-x)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1$$

dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville.

(40 markah)

(b) Diberi masalah nilai sempadan Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad 0 \leq x \leq e$$

$$y(1) = 0, \quad y(e) = 0$$

- (i) Terangkan maksud nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah tersebut.
- (ii) Cari nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah nilai sempadan berkenaan.

(60 markah)

3. Pertimbangkan persamaan pembezaan tak linear

$$\frac{dx}{dt} = (x - 1)^2 (x + 2)$$

- (a) Cari semua titik genting bagi persamaan ini.
- (b) Lakarkan garisan fasa.
- (c) Bincangkan perilaku jangka panjang bagi semua penyelesaian.

(100 markah)

4. (a) (i) Apakah sistem autonomus?
- (ii) Apakah titik genting bagi sistem autonomus?
- (iii) Huraikan pengertian nod, titik pelana, lingkaran dan pusat.
- (iv) Takrifkan titik genting yang stabil.
- (v) Takrifkan titik genting yang stabil secara asimptotik.
- (vi) Bagaimanakah teori bagi sistem autonomus yang linear digunakan untuk kajian bagi beberapa sistem autonomus yang tak linear?

(40 markah)

- (b) Kelaskan titik keseimbangan $(0, 0)$ bagi sistem autonomus

$$\frac{dx}{dt} = -6x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 6x + 2y$$

Nyatakan sama ada penyelesaian bagi sistem tersebut stabil dan mempamerkan ciri-ciri ayunan.

(60 markah)

5. Diberi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (y-x)^2$$

$$y(0) = 0.5 \quad (\text{I})$$

- (a) Dengan menggunakan penggantian $y = x + z$, tunjukkan bahawa masalah nilai awal tersebut dapat diturunkan kepada

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$z(0) = 0.5 \quad (\text{II})$$

Selesaikan masalah nilai awal (II), dengan itu tunjukkan penyelesaian tepat bagi masalah (II) ialah

$$y(x) = x + \frac{1}{(2-x)}$$

(50 markah)

- (b) Gunakan kaedah Euler untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi masalah nilai awal (I) di titik-titik $x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = \frac{2}{10}, \dots, x_{10} = 1$.

Bandingkan penyelesaian hampiran dengan penyelesaian tepat dalam (a) dan dapatkan ralat penyelesaian di titik $x = 1$ sehingga tiga titik perpuluhan.

(50 markah)