
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004

April 2004

JIM 211 – Kalkulus Lanjutan

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan ini.

Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Kelaskan titik genting bagi fungsi

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$$

dan cari nilai ekstremum tempatannya jika wujud.

(35 markah)

- (b) Diberi $w = v(x, y) e^{\alpha x + \beta y}$, α , β adalah pemalar dan $v(x, y)$ suatu fungsi x, y supaya $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$. Cari $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ dan $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Seterusnya, dapatkan nilai α dan β jika $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} + w = 0$.

(35 markah)

- (c) Suatu cakera membulat diberi oleh rantau D yang dibatasi oleh bulatan $x^2 + y^2 = 1$. Jika T darjah adalah suhu pada sebarang titik (x, y) pada cakera dan $T = 2x^2 + y^2 - y$, cari titik yang terpanas dan tersejuk pada cakera itu.

(30 markah)

2. (a) Selesaikan

(i) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2x+y) dy dx$

(ii) $\iint_A (x+2y+3) dy dx$

A adalah rantau yang dibatasi di bahagian atas oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan di bahagian bawah oleh paksi- x .

(50 markah)

...3/-

(b) Cari nilai

(i) $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} 2x^3y^2z \, dz \, dy \, dx$

(ii) $\iiint_B (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$

di sini, $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$.

(50 markah)

3. (a) Dengan menggunakan ujian yang sesuai, tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu atau mencapah

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 4}$

(50 markah)

(b) Buktikan yang berikut:

(i) Jujukan $\{2^n + 3^n\}^{\frac{1}{n}}$ menumpu.

(ii) Jujukan $\left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\}$ menokok dan terbatas.

(50 markah)

4. (a) Berikan takrif jujukan Cauchy. Tentukan sama ada setiap jujukan berikut memenuhi kriterium Cauchy atau tidak.

(i) $\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}$

(ii) $\{\sqrt{n}\}$.

(50 markah)

- (b) Tunjukkan bahawa jujukan $\left\{ \frac{nx^2}{1+nx} \right\}$ menumpu ke fungsi $f(x) = x$ secara seragam dalam selang $[0, 1]$.

(50 markah)

5. (a) Cari jejari dan selang penumpuan bagi setiap siri berikut:

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^n}$$

(ii)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)(x-2)^n}{2^n}.$$

(50 markah)

- (b) Cari polinomial Taylor $P_4(x)$ dan baki $R_5(x)$ (bentuk Lagrange) dalam kuasa-kuasa $x - 1$ bagi fungsi f yang ditakrifkan oleh

$$f(x) = x e^x.$$

(50 markah)

...5/-

Lampiran

1. (a)
$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

(b)
$$F(x, y, u, v) = 0$$

$$G(x, y, u, v) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial(F, G) / \partial(x, v)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)}$$

(c)
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

(d)
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

(e)
$$M = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

- ooo 0 ooo -

