

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

ZCT 304/3 – Keelektrikan dan Kemagnetan

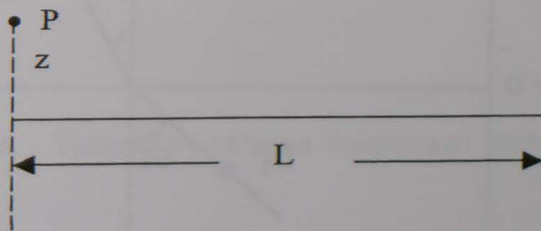
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan di Bahagian A, dan mana-mana EMPAT soalan di Bahagian B.

Bahagian A

1. Cari medan elektrik pada jarak z dari satu hujung garisan cas sepanjang L yang membawa cas garisan seragam λ coul/m. Apakah nilainya jika $z \gg L$?



(10/100)

2. Bermula dengan hukum Gauss, terbitkan persamaan Poisson, $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Dengan menggunakan persamaan Poisson, cari medan elektrik $\vec{E}(\vec{r})$ dan ketumpatan cas $\rho(r)$ jika keupayaan elektrik bagi suatu konfigurasi adalah

$$V(\vec{r}) = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

di mana A dan λ adalah pemalar.

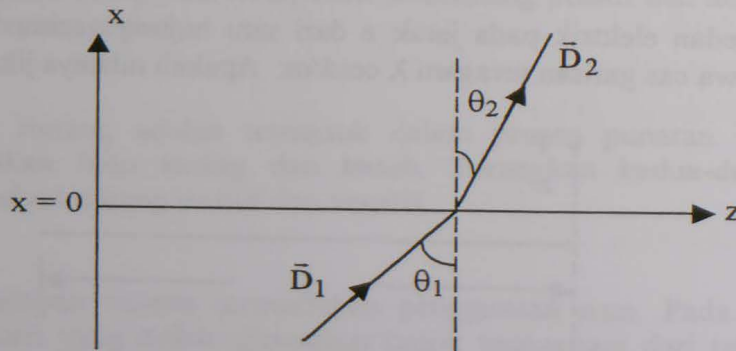
(10/100)

... 2/-

3. Satu silinder berjari R dan sepanjang L membawa pemagnetan $\vec{M} = kr^2\hat{\phi}$ di mana k adalah pemalar. Cari
- ketumpatan arus setara isipadu, \vec{J}_e .
 - ketumpatan arus setara permukaan, $\vec{\lambda}_e$ di semua permukaan silinder.
- (10/100)
4. (a) Tuliskan keempat-empat persamaan Maxwell bagi bahan konduktor tanpa cas yang mempunyai pemalar kekonduksian σ .
- (b) Terbitkan persamaan gelombang bagi perambatan gelombangnya dalam sebutan E .
- (c) Jika $E = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$, dapatkan nilai k .
- (10/100)

Bahagian B

5. (a) Nyatakan TIGA syarat sempadan bagi sistem dielektrik.
- (b)



Vektor sesaran elektrik diruang $x < 0$ adalah

$$\vec{D}_1 = 1.5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z} \text{ Coul./m}^2$$

Jika ϵ_0 dan $2.5\epsilon_0$ adalah pemalar-pemalar ketelusan bagi kawasan $x < 0$ dan $x > 0$ masing-masing dan tiada cas bebas pada $x = 0$, tentukan

- \vec{E}_2 di kawasan $x > 0$, dan
- sudut-sudut θ_1 dan θ_2 .

(15/100)

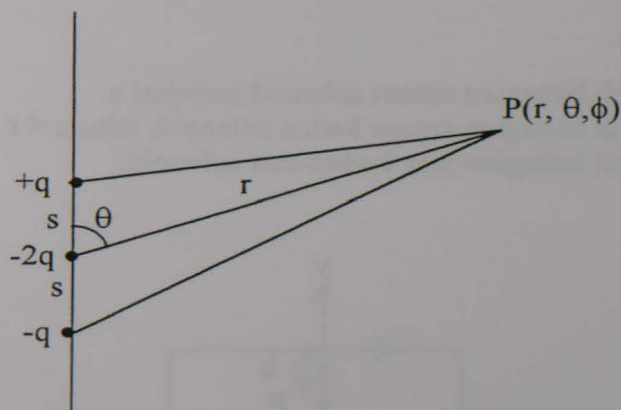
.../3

6. (a) Tuliskan hukum Gauss bagi bahan dielektrik.
- (b) Suatu sfera dielektrik berjajari a mengandungi ketumpatan cas bebas $\rho_f = e^{-\alpha r}$ di mana α adalah pemalar.
- (i) Dapatkan medan elektrik \vec{E} di ruang $r \leq a$ dan $r \geq a$.
- (ii) Cari keupayaan elektrik di pusatan sfera dengan menggunakan takrifan keupayaan elektrik:

$$V = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

(15/100)

7. Konfigurasi kutub-empat elektrik yang linear mempunyai tatarajah seperti yang ditunjukkan di bawah:



Di sini jarak $r \gg s$. Tunjukkan bahawa keupayaan elektrik yang terhasil di titik $P(r, \theta, \phi)$ adalah

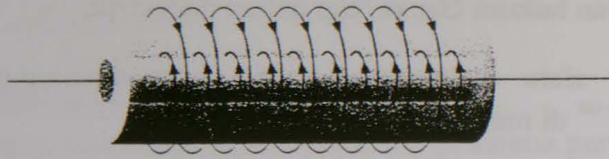
$$V = \frac{qs^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Dengan menggunakan koordinat sferaan dapatkan medan elektrik E_r , E_θ dan E_ϕ di P.

(15/100)

8. (a) Nyatakan hukum litar Ampere. Terangkan apa maksud hukum ini.
- (b) Dua solenoid yang panjang dan sepaksi setiap satu membawa arus I di arah yang berlawanan. Lihat rajah di bawah:

.../4



Solenoid bahagian dalam dengan jejari a mempunyai n_1 lilitan per meter dan solenoid bahagian luar dengan jejari b mempunyai n_2 lilitan per meter. Medan magnet \vec{B} yang dihasilkan oleh solenoid yang membawa arus I adalah

$$\vec{B} = \mu_0 n I$$

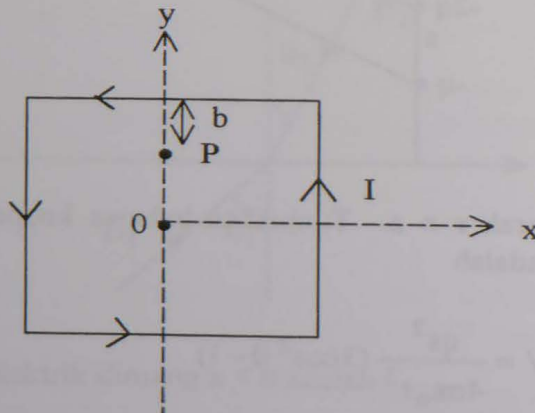
di mana n adalah bilangan lilitan per meter.

Cari \vec{B} :

- (i) di bahagian dalam solenoid berjejari a .
- (ii) di bahagian antara kedua solenoid, iaitu $a < r < b$.
- (iii) di bahagian luar kedua-dua solenoid.

(15/100)

9.



Arus I mengalir di dalam satu dawai yang telah dibentuk supaya menjadi satu segiempat sama bersisi $2a$. Lihat rajah di atas. Dengan menggunakan

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{r} d\ell'$$

hitung vektor keupayaan magnet \vec{A} di titik P .

(15/100)

.../5

10. (a) Buktikan persamaan keselanjaran

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

- (b) Tunjukkan dengan menggunakan persamaan di atas bagaimana hukum Ampere

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f$$

dapat dibetulkan supaya menjadi persamaan Maxwell yang keempat.

(15/100)

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = dx dy dz$

$$\text{Gradient : } \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergence : } \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Curl : } \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplacian : } \quad \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$; $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$\text{Gradient : } \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{Divergence : } \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \text{Curl : } \quad \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

$$\text{Laplacian : } \quad \nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = s ds d\phi dz$

$$\text{Gradient : } \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergence : } \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Curl : } \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplacian : } \quad \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

$$(1) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(2) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Product Rules

$$(3) \quad \nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

$$(4) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$(6) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(7) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$(8) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Second Derivatives

$$(9) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$(10) \quad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$(11) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

FUNDAMENTAL THEOREMS

$$\text{Gradient Theorem : } \int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

$$\text{Divergence Theorem : } \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\text{Curl Theorem : } \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

