

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

ZCT 218/4 - Kaedah Matematik

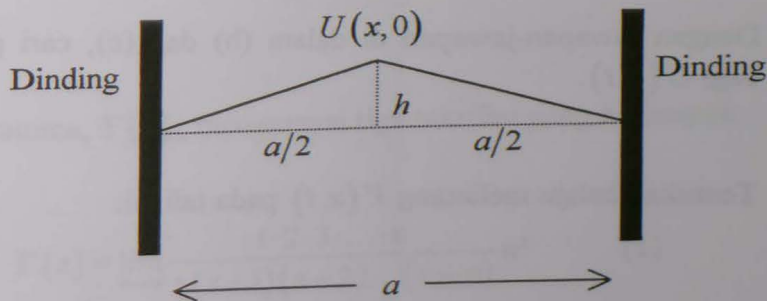
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua LIMA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

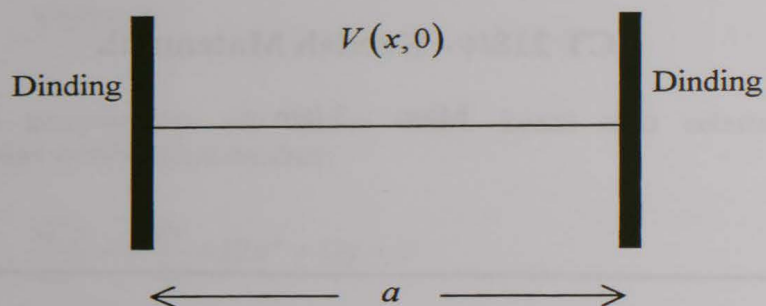
1. Satu tali yang tidak kenyal diregangkan, dan hujung-hujungnya diikat dengan ketat pada dinding. Panjang tali ini ialah a dan ketumpatan jisim per unit panjangnya ialah σ .

Pada masa $t=0$, keadaan tali dengan ketegangan T adalah seperti yang ditunjukkan pada Rajah 1.



Rajah 1

Tetapi halaju melintang pada tali pada $t = 0$, iaitu $V(x, 0) = \left. \frac{dU(x, t)}{dt} \right|_{t=0}$ adalah seperti yang ditunjukkan pada Rajah 2.



Rajah 2

- (a) Tuliskan persamaan gelombang umum bagi sesaran melintang sistem tali yang bergetar, $U(x, t)$. (10/100)
- (b) Dengan kaedah pemisahan pembolehubah, terbitkan penyelesaian am bagi persamaan gelombang di dalam (a). (30/100)
- (c) Tuliskan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal bagi sistem tali yang dihuraikan di atas. (16/100)
- (d) Dengan jawapan-jawapan di dalam (b) dan (c), cari penyelesaian khusus bagi $U(x, t)$. (34/100)
- (e) Tentukan halaju melintang $V(x, t)$ pada tali ini. (10/100)

2. Satu bar logam yang panjangnya 3 meter ditunjukkan seperti berikut:



Hujung-hujung logam ditetapkan pada $0^{\circ}C$ seperti yang ditunjukkan, dan permukaan luar di sepanjang bar logam dibalut dengan penebat haba supaya tiada haba hilang melalui permukaan ini. Bahan logam dicirikan oleh

$$\text{Pengkonduksian haba, } \Omega = 2 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Haba tentu, } C = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot (^{\circ}C)^{-1}$$

$$\text{Ketumpatan, } \rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Jika suhu pada bar logam bersandar terhadap panjang x dan masa t sahaja

- (a) Tulis persamaan haba bagi bar logam ini. (20/100)
- (b) Cari penyelesaian am bagi persamaan haba di dalam (a). (40/100)
- (c) Diberi suhu awal bar logam tersebut ialah

$$U(x, 0) = 5 \sin(4\pi x) - 3 \sin(8\pi x) + 2 \sin(10\pi x)$$

Dengan syarat-syarat sempadan dan syarat awal yang diberi, cari penyelesaian khusus suhu di sepanjang bar logam itu.

(40/100)

3. Fungsi Gamma, $\Gamma(z)$, mempunyai tiga takrifan yang berbentuk:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} n^z \quad (1)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (3)$$

Dengan menggunakan satu atau lebih takrifan-takrifan ini,

(a) Nilaikan $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} t^4 dt$ (30/100)

(b) Nilaikan $I_2 = \int_0^{\infty} e^{-2t} t^8 dt$ (30/100)

(c) Buktikan $I_3 = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ (40/100)

4. (a) (i) Satu gelombang dicirikan oleh $f(x)$ di dalam julat $-\pi \leq x \leq \pi$ yang mana

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

Terbitkan perwakilan siri Fourier bagi $f(x)$. (40/100)

- (ii) Lakarkan gelombang di dalam (i) dalam julat $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ (10/100)

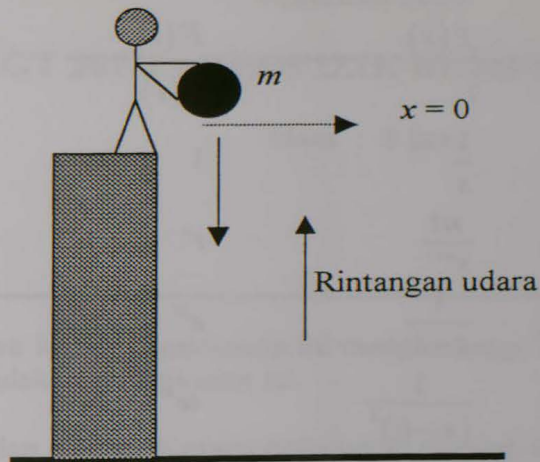
- (b) (i) Satu gelombang dicirikan oleh $g(x)$ di dalam julat $-\pi \leq x \leq \pi$, yang mana

$$g(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk $g(x)$. (40/100)

- (ii) Lakarkan gelombang di dalam (i) dalam julat $-3\pi \leq x \leq 3\pi$. (10/100)

5. Pada masa $t=0$, satu objek berjisim m dibiarkan jatuh dalam keadaan pegun di dalam udara di bawah pengaruh pecutan graviti g . Kesan rintangan udara terhadap gerakan adalah berkadar dengan halaju objek dan satu pemalar γ .



Biarkan $x(t)$ dan $x'(t)$ ialah sesaran dan halaju objek itu,

- (a) Terbitkan persamaan gerakan objek itu. (20/100)
- (b) Tuliskan syarat-syarat awal bagi gerakan objek ini. (10/100)
- (c) Selesaikan $x(t)$ dan $x'(t)$ dengan teknik transformasi Laplace. (70/100)

LAMPIRAN

Jadual transformasi Laplace

	$f(s)$	$F(t)$
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\frac{1}{s}$	1
3.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
4.	$\frac{1}{s-k}$	e^{kt}
5.	$\frac{1}{(s-k)^2}$	te^{kt}
6.	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$
7.	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$
8.	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$
9.	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$
10.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$\exp(at) \cos kt$
11.	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$\exp(at) \sin kt$