

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang Akademik 2002/2003

Februari - Mac 2003

ZCE 208/2 - MEKANIK KLASIK

Masa: 2 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua **TIGA** soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia. Diberi bersama kertas soalan ini ialah Jadual Formula (3 muka surat).

1.

(A) Jika tenaga potensial suatu sistem A ialah U_A , apakah daya konservatifnya \vec{F}_A ? Jika daya dalam sistem B ialah

$$\vec{F}_B = x^2yz \vec{e}_1 - xz \vec{e}_2 + xyz^2 \vec{e}_3,$$

cari $\vec{\nabla} \times \vec{F}_B$. Adakah sistem B suatu sistem konservatif?

(B) Suatu partikel berjisim 6 kg bergerak di dalam satah xy , dalam suatu medan daya berpotensial $U = 6x(3y - 4x)$. Pada awal, partikel itu berada di titik (5 m, -5 m) dan mulai bergerak pada masa $t = 0$ dari rehat.

- (a) Dari tenaga potensial U , cari daya konservatif \vec{F} medan itu.
- (b) Dengan menggunakan Hukum Newton Kedua, tulis persamaan gerakan Newton bagi partikel itu.
- (c) Selesaikan persamaan gerakan Newton yang didapati di bahagian (b).
- (d) Cari posisi partikel itu pada sebarang masa.
- (e) Cari halajunya pada sebarang masa.

(36/100)

2.

(A) Nyatakan Prinsip Hamilton. Juga tulis formulanya dalam Kalkulus Variasi.

(B) Suatu manik berjisim m menggelongsor tanpa rintangan disepanjang suatu dawai dalam bentuk suatu sikloid dengan persamaan

$$x = k(\theta - \sin \theta), \quad y = k(1 + \cos \theta), \quad \text{di mana } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1)$$

- (a) Lakarkan graf bagi Eq. (1), iaitu lintasan manik itu.
- (b) Cari (i) tenaga kinetik T , (ii) tenaga potensial U dan (iii) fungsi Lagrangian L dalam sebutan m , k dan θ .
- (c) Cari persamaan gerakan Lagrange bagi manik itu.
- (d) Dari fungsi Lagrangian L dalam bahagian (b), cari fungsi Hamiltonian H . Adakah fungsi Hamiltonian H sama dengan jumlah tenaga E manik itu? Kalau ya, sebut syarat-syaratnya.
- (e) Tunjukkan persamaan Lagrange di bahagian (c) boleh di tulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4k}u = 0.$$

di mana $u = \cos(\theta/2)$.

...3/-

(f) Cari penyelesaian bagi persamaan gerakan di bahagian (e). Apakah tempoh osilasi manik itu?

(34/100)

3.

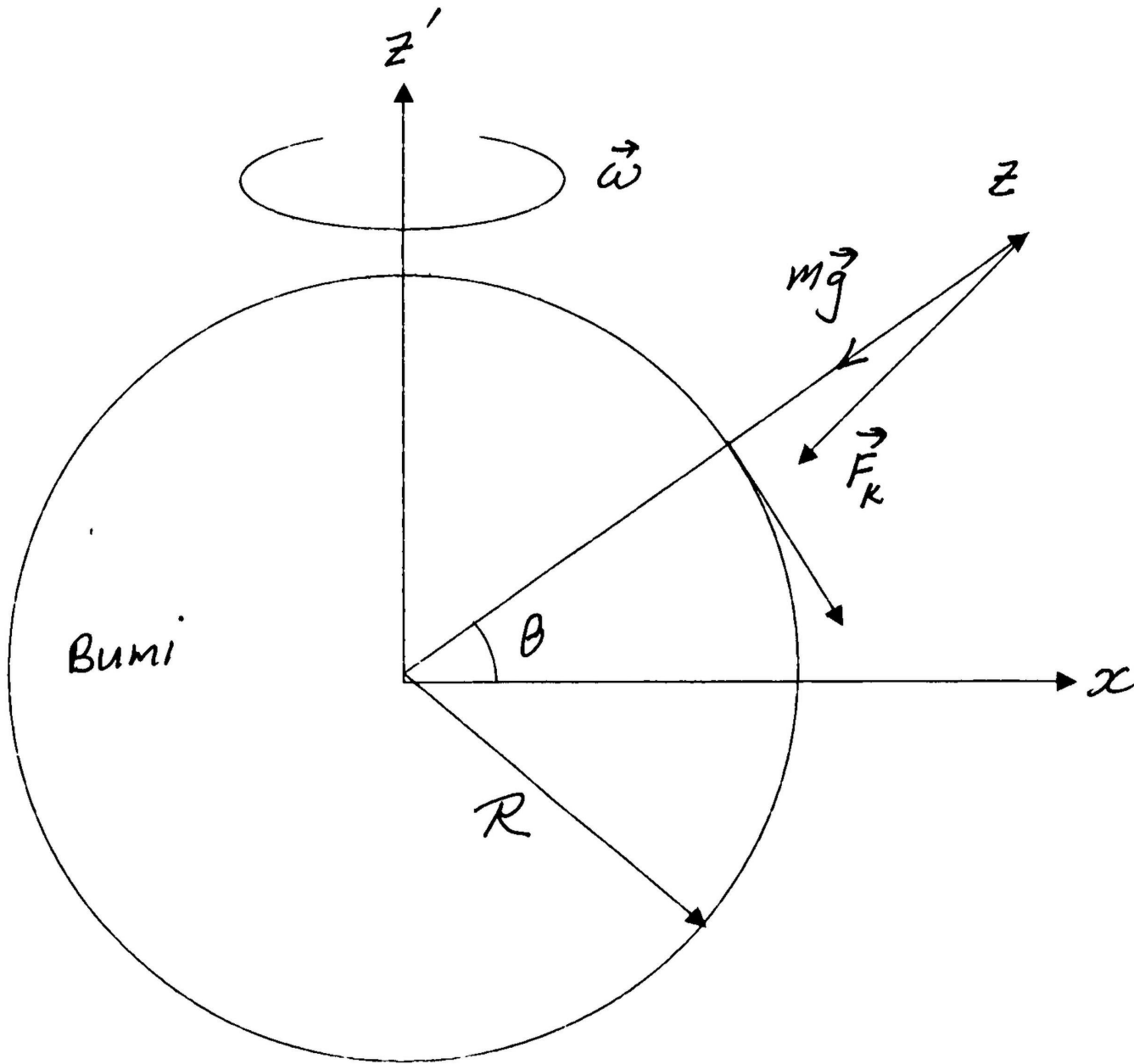
(A) Tulis formula daya berkesan \vec{F}_k bagi suatu partikel P berjisim m yang bergerak dengan halaju \vec{v}_p relatif ke Bumi. Anggapkan Bumi berputar dengan halaju sudut $\vec{\omega}$ terhadap paksinya. Apakah daya emparan dan daya Coriolis yang dialami oleh partikel itu?

(B) Tunjukkan bahawa sudut sisihan kecil ε suatu garisan batu ladung dari garisan tegak yang sebenar (iaitu garisan dari titik gantung ke pusat Bumi) pada suatu titik di permukaan Bumi pada suatu latitud θ adalah

$$\varepsilon = \frac{R\omega^2 \sin 2\theta}{2g - R\omega^2(1 + \cos 2\theta)}$$

di mana R ialah jejari Bumi. Apakah nilai maksimum sudut sisihan ε dalam unit radian? Diberi $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$, dan $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

(30/100)



D

USEFUL FORMULAS*

D.1 BINOMIAL EXPANSION

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots, \quad |x| < 1 \quad (D.1)$$

$$(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (-1)^r \binom{n}{r}x^r + \dots, \quad -|x| < 1 \quad (D.2)$$

where the binomial coefficient is

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (D.3)$$

Some particularly useful cases of the above are

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \dots \quad (D.4)$$

* An extensive list may be found, for example, in Dwight (Dw61).

$$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - \dots \quad (\text{D.5})$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (\text{D.6})$$

$$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \mp \frac{14}{81}x^3 + \dots \quad (\text{D.7})$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots \quad (\text{D.8})$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots \quad (\text{D.9})$$

$$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + \dots \quad (\text{D.10})$$

For convergence of all the above series, we must have $|x| < 1$.

D.2 TRIGONOMETRIC RELATIONS

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (\text{D.11})$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad (\text{D.12})$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \quad (\text{D.13})$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 \quad (\text{D.14})$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A) \quad (\text{D.15})$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos A) \quad (\text{D.16})$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) \quad (\text{D.17})$$

$$\sin^3 A = \frac{1}{4}(3 \sin A - \sin 3A) \quad (\text{D.18})$$

$$\sin^4 A = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2A + \cos 4A) \quad (\text{D.19})$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) \quad (\text{D.20})$$

$$\cos^3 A = \frac{1}{4}(3 \cos A + \cos 3A) \quad (\text{D.21})$$

$$\cos^4 A = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2A + \cos 4A) \quad (\text{D.22})$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (\text{D.23})$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \quad (\text{D.24})$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{D.25})$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (\text{D.26})$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{D.27})$$

D.3 TRIGONOMETRIC SERIES

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\text{D.28})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{D.29})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \quad |x| < \pi/2 \quad (\text{D.30})$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ |\sin^{-1} x| < \pi/2 \end{cases} \quad (\text{D.31})$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \dots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ 0 < \cos^{-1} x < \pi \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1 \quad (\text{D.33})$$

D.4 EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC SERIES

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{D.34})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1, \quad x = 1 \quad (\text{D.35})$$

$$\ln[\sqrt{(x^2/a^2) + 1} + (x/a)] = \sinh^{-1} x/a \quad (\text{D.36})$$

$$= -\ln[\sqrt{(x^2/a^2) + 1} - (x/a)] \quad (\text{D.37})$$

D.5 COMPLEX QUANTITIES

$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2$ (D.60)
 $\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2$ (D.61)
 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (D.62)

Polar form: $z = |z|e^{i\theta}$ (D.39)
 $z^* = |z|e^{-i\theta}$ (D.40)
 $zz^* = |z|^2 = x^2 + y^2$ (D.41)
 Real part of z : $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*) = x$ (D.42)
 Imaginary part of z : $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2i}(z - z^*) = y$ (D.43)
 Euler's formula: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (D.44)

D.6 HYPERBOLIC FUNCTIONS

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (D.45)
 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (D.46)
 $\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ (D.47)
 $\sin ix = i \sinh x$ (D.48)
 $\cos ix = \cosh x$ (D.49)
 $\sinh ix = i \sin x$ (D.50)
 $\cosh ix = \cos x$ (D.51)
 $\sinh^{-1} x = \tanh^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$ (D.52)
 $= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (D.53)
 $= \cosh^{-1}(\sqrt{x^2 + 1}), \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$ (D.54)
 $\cosh^{-1} x = \pm \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right), \quad x > 1$ (D.55)
 $= \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x > 1$ (D.56)
 $= \pm \sinh^{-1}(\sqrt{x^2 - 1}), \quad x > 1$ (D.57)
 $\frac{d}{dy} \sinh y = \cosh y$ (D.58)
 $\frac{d}{dy} \cosh y = \sinh y$ (D.59)