

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1987/88MAT201 - Kalkulus Lanjutan

Tarikh : 24 Jun 1988

Masa : 2.45 petang - 5.45 petang
(3 jam)

Jawab LIMA soalan sahaja. Semua jawapan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. a) Tentukan sama ada jujukan $\{a_n\}$ menumpu atau tidak. Jika menumpu cari hadnya

$$(i) \quad a_n = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{1}{2})^n}{n + 1}}$$

$$(ii) \quad a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$$

(20/100)

- b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n^2 + n^3}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+3)}{(n+1)^3}$$

(60/100)

- c) Cari nilai x supaya $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$ menumpu.

(20/100)

2. a) (i) Dengan menggunakan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots \quad -1 < x < 1$$

tunjukkan bahawa

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

dan nyatakan selang ketumpuan.

- (ii) dengan menggantikan $x = \frac{1}{2n+1}$ tahkikkan bahawa

$$\log(n+1) = \log n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

(40/100)

- b) Nyatakan sama ada siri-siri berikut menumpu secara bersyarat, menumpu mutlak atau mencapah

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + 1}$$

(30/100)

$$c) \text{ Jika } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tunjukkan bahawa $f(x,y)$ tidak selanjar pada $(0, 0)$

(30/100)

3. a) Cari luas daerah yang dikurungi oleh $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, $a \neq 0$

(25/100)

- b) Nilaikan kamiran berikut.

$$(i) \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy dx$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^3 dz dy dx$$

(30/100)

- c) Dengan menggunakan sistem koordinat sfera cari isipadu bungkah yang terletak di dalam sfera $\rho = a$ dan di luar kon $z = r$.

(25/100)

- d) Bentuk suatu kamiran berganda tiga lengkap dengan had di dalam tertib $dz dx dy$ yang mewakili isipadu bungkah yang dibatasi oleh permukaan-permukaan $x = y^2 + z^2$ dan $x = 1 - y^2$.

(20/100)

4. a) Cari pembezaan seluruh, dz jika $z = x^2 + 3xy - 2y^2$ dan anggarkan perubahan z jika nilai x berubah dari 3 ke 3.2 dan nilai y berubah dari 5 ke 4.9.

(25/100)

- b) Cari $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ sebagai fungsi x , y dan z dengan andaikan $z = f(x,y)$ memenuhi persamaan $xe^{xy} + ye^{zx} + ze^{xy} = 3$.

(30/100)

- c) Diberi $u^2 - v - 3x - y = 0$ dan $u - 2v^2 - x + 2y = 0$.
Cari $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$.

(15/100)

- d) Cari maksimum dan minimum fungsi $f(x,y) = xy$ dengan kekangan $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2 = 36$.

(30/100)

5. a) Nilaikan kamiran

$$\iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

jika Ω satu dari 'loop' lemniscate $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 = 0$

(20/100)

- b) Cari isipadu bungkah yang dibatasi disebelah atas oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ dan disebelah bawah oleh paraboloid $az = x^2 + y^2$, $a \neq 0$.

(40/100)

c) Tukarkan tertib kamiran dan nilaiakan

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy$$

(20/100)

d) Katakan $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Cari kembangan Maclaurin untuk $f(x)$ jika wujud.

(20/100)

6. a) Diberi $z = xy^2 - y \sin x$, cari

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} .$$

(30/100)

b) Katakan

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin 6r}{6r} & r \neq 0 \\ 1 & r = 0. \end{cases}$$

cari (i) $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, 0)$

(ii) $f_r(0, 0)$

(iii) $f_\theta(r, \theta) r \neq 0.$

(30/100)

c) Suatu fungsi ditakrifkan oleh siri kuasa.

$$y = 1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} + \dots$$

(i) cari selang ketumpuan siri ini

(ii) tunjukkan bahawa wujud pemalar a & b dengan fungsi ini memenuhi persamaan

$$y'' = x^a y + b.$$

(40/100)