

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

**JIM 101 - Kalkulus**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

...2/-

1. (a) Selesaikan ketaksamaan berikut:

$$\frac{x^2 + 2}{x + 2} \leq 1.$$

(30 markah)

- (b) Diberi nombor kompleks

$$z_1 = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{dan} \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$$

Tentukan  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ .

(30 markah)

- (c) Jika  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

(i) tunjukkan  $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x-2}$

(ii) dapatkan  $(f \circ f^{-1})(x)$ .

(40 markah)

2. (a) Dengan menggunakan Pembezaan Prinsip Pertama, tunjukkan bahawa  $f'(x) = 6x$  jika  $f(x) = 3x^2 - 1$ .

(30 markah)

- (b) Dengan menggunakan petua L'Hôpital, cari had berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

(30 markah)

- (c) Diberi  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$ , dapatkan

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(iv) Bincangkan keselanjaran  $f(x)$  dalam selang  $[-2, 2]$ .

(40 markah)

3. (a) Dapatkan  $\frac{dy}{dx}$  bagi persamaan berikut:

(i)  $y = -\frac{2}{x} \cos(x+3)$       (ii)  $y^2 = x^2 + \sin xy.$

(40 markah)

(b) Selesaikan kamiran berikut:

(i)  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$       (ii)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta$

(iii)  $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}$

(60 markah)

4. (a) Tunjukkan bahawa persamaan berparameter  $x(t) = 5 \sin t$ ,  $y(t) = 4 \cos t$  adalah suatu elips berpusat di titik (0, 0) dan tentukan titik-titik fokusnya.

(40 markah)

(b) Panjang lengkok L bagi persamaan berparameter diberikan oleh

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2} d\theta.$$

Jika suatu lengkung diberi dalam koordinat kutub dengan  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , di mana  $r = f(\theta)$  dengan  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , tunjukkan bahawa panjang lengkok L ialah

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

Seterusnya, cari panjang lengkok bagi  $r = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$  untuk  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

(60 markah)

5. (a) Dapatkan persamaan bulatan yang melalui titik-titik (1, 6), (- 4, 1) dan (4, -3) serta tentukan koordinat pusatnya.

(30 markah)

- (b) Diberi  $\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Buktikan bahawa

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} .$$

(30 markah)

- (c) Cari isipadu kisanan bagi rantau yang dibatasi oleh lengkung  $y = x^2 - x + 9$  dan garis lurus  $y = 5x + 4$  yang dikisar terhadap paksi x.

(40 markah)