UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

ZMC 211/3 - Kaedah Matematik II

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Tunjukkan bahawa set vektor $\underset{\sim}{r}_1\ \underset{\sim}{r}_2\ \underset{\sim}{r}_3$ diberi oleh

$$\underset{\sim}{r}_1 = 2\underset{\sim}{a} - 3\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}$$

$$\underset{\sim}{r}_2 = 3\underset{\sim}{a} - 5\underset{\sim}{b} + 2\underset{\sim}{c}$$

$$\underset{\sim}{r}_3 = 4\underset{\sim}{a} - 5\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}$$

(di sini $\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}$ adalah vektor tak sifar dan tak sesatah) adalah bersandar secara linear.

(25 markah)

(b) Jika $\underset{\sim}{A} = 4\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{B} = 2\underset{\sim}{i} - 10\underset{\sim}{j} - 7\underset{\sim}{k}$ dan $\underset{\sim}{C} = 5\underset{\sim}{i} + 7\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}$, tentukan nilai

(i) $(\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}).\underset{\sim}{C}$ dan (ii) $\underset{\sim}{A} \times (\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C})$

(20 markah)

(c) Diberi vektor $\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}$. Katakan

$$\underset{\sim}{a}' = \frac{\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}}{[\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}]}, \quad \underset{\sim}{b}' = \frac{\underset{\sim}{c} \times \underset{\sim}{a}}{[\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}]}, \quad \underset{\sim}{c}' = \frac{\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}}{[\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}]}$$

(i) Tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{a}' = \underset{\sim}{b}.\underset{\sim}{b}' = \underset{\sim}{c}.\underset{\sim}{c}' = 1$ dan $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}' = \underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{c}' = 0$ dan sebagainya.

(15 markah)

...2/-

(ii) Buktikan bahawa $(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{a}') + (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{b}') + (\underset{\sim}{c} \times \underset{\sim}{c}') = \underline{O}$.

(25 markah)

(iii) Jika $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{i}$ $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{j}$ $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{k}$
di sini $\underset{\sim}{i}$ $\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{k}$ adalah vektor asas masing-masing sepanjang paksi x, y dan z, tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{i}$ $\underset{\sim}{j}$ $\underset{\sim}{k}$ menbentuk suatu asas swasalingan.

(15 markah)

2\. (a) Jika $\underset{\sim}{r} = t^2\underset{\sim}{i} - t\underset{\sim}{j} + (2t+1)\underset{\sim}{k}$, cari nilai

$$\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2}, \quad \left|\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\right|, \quad \left|\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2}\right|$$

pada $t = 0$.

(10 markah)

(b) Suatu zarah bergerak sepanjang lengkung $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$, di sini t ialah masa. Cari komponen halaju dan pecutan zarah itu pada $t = 1$ mengikut arah $\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$.

(25 markah)

(c) Bezakan $\dfrac{\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{a}}{\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{a}}$ terhadap t, di sini $\underset{\sim}{a}$ vektor pemalar.

(10 markah)

(d) Jika $\underset{\sim}{r} = x\cos y\,\underset{\sim}{i} + x\sin y\,\underset{\sim}{j} + c\log\{x + \sqrt{x^2 - c^2}\}\underset{\sim}{k}$.

Cari $\dfrac{\partial\underset{\sim}{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\underset{\sim}{r}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\underset{\sim}{r}}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2\underset{\sim}{r}}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2\underset{\sim}{r}}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\underset{\sim}{r}}{\partial y\partial x}$.

Adakah $\dfrac{\partial^2\underset{\sim}{r}}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2\underset{\sim}{r}}{\partial y\partial x}$?

Beri komen atas ini.

(25 markah)

...3/-

(e) Jika $\underset{\sim}{A} = 2x^2\underset{\sim}{i} - 3yz\underset{\sim}{j} + xz^2\underset{\sim}{k}$ dan $\phi = 2z - x^3y$,

Cari (i) $\underset{\sim}{A}.\nabla\phi$ dan (ii) $\underset{\sim}{A} \times \nabla\phi$ pada titik (1,-1,1).

(15 markah)

(f) Buktikan bahawa $\underset{\sim}{V} = (x+3y)\underset{\sim}{i} + (y-2z)\underset{\sim}{j} + (x+az)\underset{\sim}{k}$ adalah vektor solenoidal apabila $a = -2$.

(15 markah)

3. (a) Buktikan bahawa bagi sebarang dua vektor $\underset{\sim}{f}$ dan $\underset{\sim}{g}$

$$\nabla.(\underset{\sim}{f} \times \underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{g}.(\nabla \times \underset{\sim}{f}) - \underset{\sim}{f}.(\nabla \times \underset{\sim}{g})$$

(25 markah)

(b) Buktikan bahawa

$$\iint_s \nabla\phi \times \nabla\psi . d\underset{\sim}{s} = 0$$

di sini s ialah permukaan tertutup, dan ϕ dan ψ adalah fungsi terbezakan.

(25 markah)

(c) Buktikan bahawa bagi sebarang vektor $\underset{\sim}{A}$, $\nabla.(\nabla \times \underset{\sim}{A}) = 0$ dan nyatakan di bawah syarat apakah pernyataan ini sah.

(15 markah)

(d) Jika $\underset{\sim}{H} = \nabla \times \underset{\sim}{A}$, buktikan bahawa

$$\iint_s \underset{\sim}{H}.\underset{\sim}{n}\, ds = 0$$

bagi sebarang permukaan tertutup s, dan $\underset{\sim}{n}$ ialah vektor normal bagi permukaan.

(10 markah)

...4/-

(e) Jika ϕ adalah suatu fungsi skalar yang terbezakan, tunjukkan bahawa

$$\oint_c \phi d\underset{\sim}{r} = \iint_s d\underset{\sim}{s} \times \nabla\phi$$

Perhatikan identiti vektor

$$\nabla \times (\phi \underset{\sim}{f}) = \phi \nabla \times \underset{\sim}{f} - \underset{\sim}{f} \times \nabla\phi$$

di sini $\underset{\sim}{f}$ ialah suatu fungsi vektor dan ϕ suatu fungsi skalar. c ialah lengkung tertutup yang mengelilingi luas s.

(25 markah)

4. (a) Jika $\psi = \psi(u,v,w)$ adalah suatu fungsi skalar yang sebarangan, tunjukkan bahawa kecerunan di dalam koordinat melengkung linear berortogon ialah

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial\psi}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial\psi}{\partial w} \nabla w$$

dan ini mengambil bentuk

$$\nabla\psi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial\psi}{\partial u} \underset{\sim}{e}_u + \frac{1}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial v} \underset{\sim}{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial\psi}{\partial w} \underset{\sim}{e}_w$$

di sini h_u, h_v dan h_w adalah faktor skala dan $\underset{\sim}{e}_u$, $\underset{\sim}{e}_v$ dan $\underset{\sim}{e}_w$ adalah vektor unit di dalam sistem ini.

(15 markah)

(b) Jika $\underset{\sim}{f} = f_u\underset{\sim}{e}_u + f_v\underset{\sim}{e}_v + f_w\underset{\sim}{e}_w$ adalah suatu vektor yang dinyatakan di dalam asas $\underset{\sim}{e}_u$, $\underset{\sim}{e}_v$, $\underset{\sim}{e}_w$ tunjukkan bahawa kecapahan di dalam koordinat melengkung linear berortogon ialah

$$\nabla . \underset{\sim}{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w f_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_w h_u f_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v f_w)\right]$$

[Perhatikan identiti $\nabla . (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{b} . (\nabla \times \underset{\sim}{a}) - \underset{\sim}{a} . (\nabla \times \underset{\sim}{b})$].

(40 markah)

...5/-

(c) Sistem koordinat silinderan ditakrif oleh transformasi

$$x = u \cos v \qquad y = u \sin v \qquad z = w$$

di sini $u \geq 0 \qquad 0 \leq v < 2\pi \qquad -\infty < w < \infty.$

Tentukan faktor skala h_u, h_v, h_w dan vektor unit $\underset{\sim}{e}_u, \underset{\sim}{e}_v, \underset{\sim}{e}_w$ dan buktikan bahawa sistem koordinat silinderan itu berortogon.

Dapatkan transformasi Jacobian bagi kes ini.

(30 markah)

(d) Di dalam koordinat silinderan (ρ, ϕ, z), jika $\psi = \psi(\rho, \phi, z)$, $\underset{\sim}{f} = f_\rho \underset{\sim}{e}_\rho + f_\phi \underset{\sim}{e}_\phi + f_z \underset{\sim}{k}$, nilaikan

(i) ds^2, (ii) dv, (iii) $\nabla\psi$ dan (iv) $\nabla . \underset{\sim}{f}$.

ds^2 ialah kuasa dua unsur jarak dan dv ialah unsur isipadu.

(15 markah)

- oooOooo -