Final Examination
2018/2019 Academic Session

June 2019

JIM421 – Modern Algebra
(Aljabar Moden)

Duration : 3 hours
(Masa: 3 jam)

Please check that this examination paper consists of **SEVEN (7)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH (7)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini].*

Instructions : Answer **ALL** questions.

*[**Arahan** : Jawab **SEMUA** soalan].*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

1. (a). List the elements in $\{a,b,c\} \times \{1,2,c\}$.

(20 marks)

(b). (i). Show that $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ has the same cardinality as $\mathbb{R}$.

(ii). How many numbers in the interval $0 \le x \le 1$ can be expressed in the form .##, where each # is a digit $0,1,2,3,\ldots,9$? How many are there of the form .#####?

(iii). Based upon (i). and (ii)., evaluate $10^{\aleph_0}$, $12^{\aleph_0}$ and $2^{\aleph_0}$.

(50 marks)

(c). A binary operation '$*$' is defined on $\mathbf{Z}^+$ by $\mathrm{a} * \mathrm{b} = \mathrm{ab}$. Determine whether it is commutative and associative.

(30 marks)

2. (a). Let F be the set of all real-valued functions having as domain the set $\mathbb{R}$ of all real numbers. For each ordered pair (f,g) of functions in F, we define for each $x \in \mathbb{R}$, $f+g$ by $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Prove that this function $+$ on F is associative or give a counterexample.

(30 marks)

(b). Let $*$ be defined on $\mathbf{Z}$ by letting $a * b = ab$. Determine whether the binary operation $*$ gives a group structure on the given set. If no group results, give the first axiom in the order $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_3$ that does not hold.

(40 marks)

(c). Let G be a group with a finite number of elements. Show that for any $a \in G$, there exists an $n \in \mathbb{Z}^+$ such that $a^n = e$.

(30 marks)

3. (a). Determine whether diagonal $n \times n$ matrices with no zeros real numbers on the diagonal is a subgroup of $GL(n,\mathbb{R})$.

(25 marks)

(b). Let a and b be elements of a group G. Show that if ab has finite order n, then ba also has order n.

(25 marks)

(c). Let H be a subgroup of a group G. Prove that if the partition of G into left cosets of H is the same as the partition into right cosets of H, then $g^{-1}hg \in H$ for all $g \in H$ and all $h \in H$.

(50 marks)

4. (a). Find the index of $\langle \mu_2 \rangle$ in the group D_4 given in the following table.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

(30 marks)

(b). Let G be any group and a be any element of G. Let $\phi : \mathbf{Z} \to G$ be defined by $\phi(n) = a^n$. Show that ϕ is a homomorphism. Describe the image and the possibilities for the kernel of ϕ.

(30 marks)

(c). Compute the product in the ring $(-3,5)(2,-4)$ in $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_{11}$.

(40 marks)

5. (a). Find the order of the factor group $\mathbf{Z}_6/\langle 3\rangle$.

(30 marks)

(b). Let R be a ring that contains at least two elements. Suppose for each nonzero $a \in R$, there exists a unique $b \in R$ such that $aba = a$.

(i). Show that R has no divisors of 0.

(ii). Show that $bab = b$.

(iii). Show that R has unity.

(iv). Show that R is a division ring.

(30 marks)

(c). Let R be a nonzero commutative ring, and let T be a nonempty subset not containing 0 be closed under multiplication.

(i). Starting with $R \times T$, can we show that the ring R be enlarged to a partial ring of quotients $Q(R,T)$?

(ii). What if $R = \mathbb{Z}_6$ and $T = \{1,2,4\}$?

(40 marks)

1. (a). Senaraikan unsur-unsur di dalam $\{a,b,c\}\times\{1,2,c\}$.

(20 markah)

(b). (i). Tunjukkan $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$ mempunyai kekardinalan yang sama dengan $\mathbb{R}$.

(ii). Berapa banyak nombor di dalam selang $0\le x\le 1$ boleh dihuraikan dalam bentuk .##, di mana setiap # adalah suatu digit $0,1,2,3,\ldots,9$? Berapakah yang ada dalam bentuk .#####?

(iii). Berdasarkan (i). dan (ii)., nilaikan $10^{\aleph_0}$, $12^{\aleph_0}$ dan $2^{\aleph_0}$.

(50 markah)

(c). Suatu operasi dedua '$*$' ditakrifkan ke atas $\mathbf{Z}^+$ oleh $a * b = ab$. Tentukan sama ada operasi tersebut kalis tukar tertib dan kalis sekutuan.

(30 markah)

2. (a). Andaikan F sebagai set yang mengandungi semua fungsi bernilai nyata berdomainkan set $\mathbb{R}$ semua nombor nyata. Bagi setiap pasangan tertib (f,g) fungsi-fungsi di dalam F , kita takrifkan bagi setiap $x\in\mathbb{R}$, $f+g$ oleh $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Buktikan fungsi $+$ ini ke atas F adalah kalis sekutuan atau berikan satu contoh penyangkal.

(30 markah)

(b). Andaikan $*$ tertakrif ke atas $\mathbf{Z}$ sebagai $a*b=ab$. Tentukan sama ada operasi dedua $*$ memberikan suatu struktur kumpulan ke atas set yang diberikan. Jika tiada sebarang kumpulan terhasil, berikan aksiom pertama di dalam tertib $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_3$ yang tidak dapat bertahan.

(40 markah)

(c). Andaikan G sebagai kumpulan yang mempunyai unsur terhingga. Tunjukkan bagi sebarang $a\in G$, wujud suatu $n\in\mathbb{Z}^+$ supaya $a^n=e$.

(30 markah)

…6/-

3. (a). Tentukan sama ada pepenjuru matriks $n \times n$ dengan nombor nyata bukan sifar pada pepenjuru tersebut adalah suatu subkumpulan $GL(n,\mathbb{R})$.

(25 markah)

(b). Andaikan a dan b sebagai unsur suatu kumpulan G. Tunjukkan bahawa jika ab mempunyai tertib terhingga n, maka ba juga bertertib n.

(25 markah)

(c). Andaikan H sebagai suatu subkumpulan bagi suatu kumpulan G. Buktikan bahawa jika partisi G ke dalam koset kiri H sama dengan partisi ke dalam koset kanan bagi H, maka $g^{-1}hg \in H$ bagi semua $g \in H$ dan semua $h \in H$.

(50 markah)

4. (a). Cari indeks $\langle \mu_2 \rangle$ di dalam kumpulan D_4 berdasarkan jadual berikut.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

(30 markah)

(b). Andaikan G sebagai kumpulan sebarangan dan a sebagai suatu unsur sebarangan bagi G. Andaikan $\phi : \mathbf{Z} \to G$ ditakrifkan oleh $\phi(n) = a^n$. Tunjukkan bahawa ϕ adalah suatu homomorfisma. Huraikan imej dan kemungkinan inti ϕ.

(30 markah)

(c). Hitung hasil darab di dalam gelanggang $(-3,5)(2,-4)$ dalam $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_{11}$.

(40 markah)

5. (a). Cari tertib kumpulan faktor $\mathbf{Z}_6/\langle 3\rangle$.

(30 markah)

(b). Andaikan R sebagai suatu gelanggang yang mengandungi sekurang-kurangnya dua unsur. Andaikan bagi setiap $a \in R$ yang bukan sifar, wujud suatu $b \in R$ yang unik supaya $aba = a$.

(i). Tunjukkan bahawa R tidak mempunyai pembahagi buat 0.

(ii). Tunjukkan bahawa $bab = b$.

(iii). Tunjukkan bahawa R mempunyai uniti.

(iv). Tunjukkan bahawa R adalah suatu gelanggang pembahagian.

(30 markah)

(c). Andaikan R sebagai suatu gelanggang kalis tukar terbit bukan sifar, dan andaikan T sebagai suatu subset tak kosong yang tidak mengandungi 0 tertutup di bawah pendaraban.

(i). Bermula dengan $R \times T$, bolehkah kita tunjuk bahawa gelanggang R boleh diperbesarkan menjadi suatu gelanggang hasil bahagi separa $Q(R,T)$?

(ii). Apa yang terjadi apabila $R = \mathbb{Z}_6$ dan $T = \{1,2,4\}$?

(40 markah)

- oooOooo -