Final Examination
2018/2019 Academic Session

June 2019

JIM419 – Complex Variables
(Pembolehubah Kompleks)

Duration : 3 hours
(Masa: 3 jam)

Please check that this examination paper consists of **SEVEN (7)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH (7)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini].*

Instructions : Answer **ALL** questions.

*[**Arahan** : Jawab **SEMUA** soalan].*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai].

1. (a). Given a complex number $(-1-i)^3$.

   (i). Expand the given complex number directly.

   (ii). Verify your answer in (i). using $z^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$ where r is radius, n is an integer and θ is angle.

   (iii). Sketch the result obtained in (ii). in the Argand plane.

   (iv). Find the angle and distance of the vector.

(45 marks)

   (b). Given that

$$z_{k+1} = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right)\right] \text{ where } k = 0,1,2,3,4.$$

   Find all solutions of $z^5 + 32 = 0$.

(55 marks)

2. (a). Given an expression of $z = 7\frac{13}{17} + \frac{3+4i}{8-2i} + 14\frac{15}{34}i.$

   (i). Simplify expression z in the form $a+bi$ where $a,b \in \square$. State the values of a and b.

   (ii). Find the conjugate of z.

   (iii). Find the modulus of z.

(50 marks)

   (b). Let $\theta \in \square$. Given $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$

   (i). Find $e^{-i\theta}$.

   (ii). Find $\cos\theta$ and $\sin\theta$.

   (iii). Hence, prove that $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta.$

(50 marks)

3. (a). Given $f(z) = \left(x^2 - y^2 + 6x + 9\right) + i\left(6y + 2xy\right)$

   (i). Show that $f(z)$ is differentiable at every point of $\mathbb{C}$.

   (ii). Find $f'(z)$ in term of z.

   (iii). Show that $f(z)$ is a harmonic function.

(60 marks)

   (b). By using Milne Thomson method, find the analytic function $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ if the real part is given by $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$.

(40 marks)

4. Evaluate the integral $\int_0^{1+i} \left(x - y + ix^2\right) dz$ where $z = x + iy$ along

   (a). the straight line from $z = 0$ to $z = 1 + i$.

(30 marks)

   (b). the real axis from $z = 0$ to $z = 1$, then along the line parallel to the imaginary axis from $z = 1$ to the $z = 1 + i$.

(40 marks)

   (c). the parabola $x = y^2$.

(30 marks)

5. (a). Evaluate $\int_c \frac{z-3}{z^2 + 2z + 5} dz$ where C is the circle of $\left|z + 1 - i\right| = 2$.

(25 marks)

   (b). Evaluate $\int_c \frac{z+3}{z\left(z+1\right)(z-3)} dz$ where C is the circle with $\left|z\right| = 2$.

(25 marks)

(c). Given that $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}$ where $0 < r < 1$.

(i). Let $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ and $z = e^{i\theta}$, show that the above integral can be simplified as

$$\int_c \frac{1}{i(z-r)(1-rz)} dz$$

(ii). Hence, prove that $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta + r^2} = \frac{2\pi}{1-r^2}$ by using Residue Theorem.

(50 marks)

1. (a). Diberi satu nombor kompleks $(-1-i)^3$.

    (i). Kembangkan nombor kompleks yang diberi secara terus.

    (ii). Tentusahkan jawapan anda di (i). menggunakan $z^n = r^n\left[\text{kos}\, n\theta + i\sin n\theta\right]$ di mana r adalah jejari, n adalah integer dan θ adalah sudut.

    (iii). Lakarkan hasil yang diperolehi daripada (ii). dalam satah Argand.

    (iv). Cari sudut dan jarak bagi vektor yang terhasil itu.

(45 markah)

(b). Diberi bahawa

$$z_{k+1} = \sqrt[m]{r}\left[\text{kos}\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right)\right] \text{ dengan } k = 0,1,2,3,4.$$

Cari semua penyelesaian bagi $z^5 + 32 = 0.$

(55 markah)

2. (a). Diberi ungkapan $z = 7\frac{13}{17} + \frac{3+4i}{8-2i} + 14\frac{15}{34}i.$

    (i). Permudahkan ungkapan z dalam bentuk $a+bi$ dengan $a,b \in \mathbb{R}$. Nyatakan nilai a dan b.

    (ii). Cari konjugat z.

    (iii). Cari modulus z.

(50 markah)

(b). Biarkan $\theta \in \mathbb{R}$. Diberi $e^{i\theta} = \text{kos}\,\theta + i\sin\theta.$

    (i). Cari $e^{-i\theta}$.

    (ii). Cari $\text{kos}\,\theta$ dan $\sin\theta$.

    (iii). Oleh itu, buktikan $2\sin\theta\,\text{kos}\,\theta = \sin 2\theta.$

(50 markah)

3. (a). Diberi $f(z)=\left(x^2-y^2+6x+9\right)+i\left(6y+2xy\right)$

   (i). Tunjukkan bahawa $f(z)$ terbezakan pada setiap titik dalam $\mathbb{C}$.

   (ii). Cari $f'(z)$ dalam sebutan z .

   (iii). Tunjukkan bahawa $f(z)$ ialah suatu fungsi harmonik.

(60 markah)

(b). Dengan menggunakan kaedah Milne Thomson, cari fungsi analitik $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ jika bahagian nyata diberi sebagai $u(x,y)=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2$.

(40 markah)

4. Nilaikan kamiran $\int_0^{1+i}\left(x-y+ix^2\right)dz$ di mana $z=x+iy$ sepanjang

(a). garis lurus dari $z=0$ ke $z=1+i.$

(30 markah)

(b). paksi nyata dari $z=0$ ke $z=1$, kemudian sepanjang garis selari dengan paksi khayalan dari $z=1$ ke $z=1+i$.

(40 markah)

(c). parabola $x=y^2.$

(30 markah)

5. (a). Nilaikan $\int_c \frac{z-3}{z^2+2z+5}dz$ dengan C adalah bulatan $\left|z+1-i\right|=2.$

(25 markah)

(b). Nilaikan $\int_c \frac{z+3}{z\left(z+1\right)(z-3)}dz$ dengan C adalah bulatan dengan $\left|z\right|=2.$

(25 markah)

(c). Diberi bahawa $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\,\text{kos}\,\theta + r^2}$ dengan $0 < r < 1.$

(i). Biarkan $\text{kos}\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ dan $z = e^{i\theta}$, tunjukkan bahawa kamiran di atas boleh diringkaskan sebagai

$$\int_c \frac{1}{i(z-r)(1-rz)} dz$$

(ii). Seterusnya, buktikan bahawa $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\,\text{kos}\,\theta + r^2} = \frac{2\pi}{1-r^2}$ dengan menggunakan Teorem Reja.

(50 markah)

- oooOooo -