UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004

September / Oktober 2003

MSG 327 – PEMODELAN MATEMATIK

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua tiga** soalan.

1. (a) Persamaan aliran-sebaran untuk pencemaran sungai adalah diberikan oleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u\frac{\partial c}{\partial x} + E\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + W. \qquad (1)$$

Jika unit asas ialah kg, m, dan s, berikan unit dan maksud bagi setiap sebutan c, u, E, k dan W.

(b) Apabila keadaan mantap tercapai, persamaan aliran-sebaran bagi pencemaran sungai di atas diringkaskan menjadi

$$E\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u\frac{\partial c}{\partial x} - kc = 0. \qquad (2)$$

Anggapkan pekali *E, u dan k* adalah malar

(i) Terbitkan penyelesaian analitik

$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x}, & x \le 0 \\ c_0 e^{m_2 x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

di mana $m_1 = \frac{u}{2E}(1+\alpha)$, $m_2 = \frac{u}{2E}(1-\alpha)$, $\alpha = \sqrt{1+\frac{4kE}{u^2}}$.
Terangkan apakah syarat-syarat sempadan yang sesuai, untuk penyelesaian di atas.

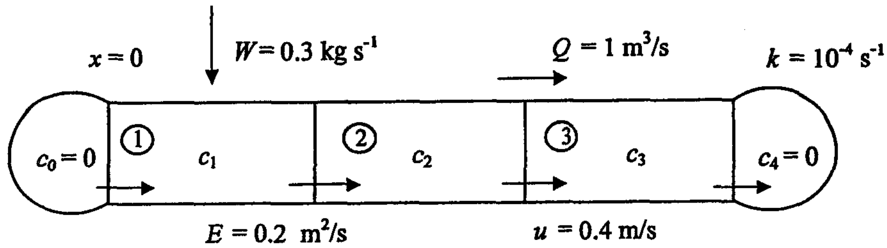
(ii) Jika aliran ialah $Q\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ dan kadar perlepasan bahan kimia ialah $W\,\mathrm{kg\,s}^{-1}$ pada $x = 0$, terbitkan nilai $c_0 = \frac{W}{Q\alpha}$.

(iii) Andaikan $E = 0.2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, $u = 0.4$ m/s, $Q = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, $k = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ dan $W = 0.3\,\mathrm{kg\,s}^{-1}$. Cari c_0 dan $c(x)$. Lakarkan $c(x)$, untuk $x \in (-\infty, \infty)$.

(iv) Dapatkan anggaran nilai untuk setiap sebutan dalam persamaan pembezaan (2) di atas untuk $x \ge 0$ dan $x \le 0$ masing-masing.

(c) Berasaskan butir-butir di atas, kita selesaikan (2) bahagian 1(b) melalui kaedah berangka dengan 3 segmen seperti tertunjuk berikut, untuk $x \ge 0$.

...3/-



Anggapkan panjang setiap segmen ialah $\Delta x = 2000$ m, dan $c_0 = 0$, $c_4 = 0$.

Bentukkan sistem (3×3) untuk masalah ini dan selesaikan. Bandingkan dengan jawapan di bahagian (1b) di atas.

Adakah pilihan $\Delta x = 2000$ m, dan $c_0 = c_4 = 0$ sesuai?

(d) Terbitkan persamaan (1). Terangkan dengan jelas anggapan sesuai yang dikenakan.

2. (a) Misalkan suatu bahan organik terlarut (BOD) di dalam satu kolam kecil dengan kepekatan ℓ mg$/\ell, (0_2)$ yang merosot nilainya mengikut kadar linear berikut

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = -\alpha \ell, \quad \ell(0) = \ell_0. \qquad (3)$$

Di samping ini oksigen terlarut (DO) dalam kolam itu c mg$/\ell\ 0_2$ akan berubah mengikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \beta(c_s - c) - \alpha \ell, \quad c(0) = c_0 \qquad (4)$$

di mana β ialah kadar pengudaraan semula dan c_s pemalar ketepuan bagi oksigen terlarut c.

Selesaikan (3) untuk ℓ terlebih dahulu dan kemudian selesaikan (4) untuk c.

Jika $\ell_0 = 18$ mg$/\ell$, $c_0 = 6$ mg$/\ell$, $c_s = 9$ mg$/\ell$, $\alpha = 0.5$ sehari dan $\beta = 0.8$ sehari, dapatkan ℓ dan c. Lakarkan ℓ dan c di rajah yang sama, untuk $x \in [0, \infty)$.

(b) Sekarang persamaan (3) di atas diubahsuai kepada

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = -\alpha \ell + \gamma \sin(b\, t) \qquad , \ \ell(0) = \ell_0 \qquad (5)$$

di mana γ *dan* b adalah pemalar. Persamaan (4) dikekalkan. Apakah maksud dan dimensi bagi γ?
Selesaikan (5) untuk mendapatkan ℓ. Masukkan ℓ ini ke dalam (4) dan selesaikan (4) untuk c.

Jika $\gamma = 0.5\,\text{mg}/\ell/\text{hari}$, dan $b = 0.0172142/$ hari, dan parameter-parameter lain di dalam (4) dan (5) dikekalkan seperti di atas , selesaikan dan lakarkan ℓ dan c pada rajah yang sama, dengan menunjukkan kelakuan penyelesaian apabila $t \to \infty$.

3. (a) Andaikan unit asas ialah kg, m dan s. Terbitkan persamaan keabadian

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6}$$

bagi suatu saluran dengan luas keratan rentas $A\,\text{m}^2$, aliran air $Q\ \text{m}^3/\text{s}$, t = masa (s), x = jarak (m). Seterusnya terbitkan persamaan gelombang tulen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

bagi suatu saluran seragam dengan u = halaju air dan η = paras air atas paras purata. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas serta maksud dan unit g dan h.

(b) Tunjukkan bahawa (7) dan (8) boleh diturunkan kepada bentuk persamaan gelombang berikut:

$$\omega_{tt} = c^2\omega_{xx} \tag{9}$$

untuk u dan η masing-masing. Apakah unit dan nilai c^2 ?

Sahkan bahawa

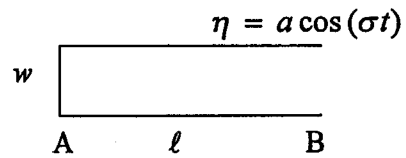
$$\eta = a\sin(\sigma t - kx) \tag{10}$$

$$u = a\sqrt{\frac{g}{h}}\,\sin(\sigma t - kx) \tag{11}$$

ialah suatu penyelesaian dengan $\sigma^2 = ghk^2$. Apakah maksud dan unit bagi σ dan k?

(c) Suatu saluran seragam adalah terbuka kepada pasang surut berkalaan 12.00 jam pada kedua-dua hujung. Biarkan dalaman purata 12m, $g = 9.81\,\text{m}/\text{s}^2$. Dapatkan dan lakarkan η dan u pada rajah yang sama jika amplitud pasang surut ialah 1.0 m. Apakah frekuensi dan panjang gelombang pasang surut ini?

(d) Misalkan suatu saluran seragam berbentuk segi empat dengan hujung A ditutup dan hujung B terbuka ke pasang-surut $\eta = a\cos(\sigma t)$ m. Biarkan ℓ m = panjang saluran, w m = lebar, d m = dalaman purata, di mana $a << d$.



Dapatkan aliran $Q(t)$ m^3/s dan halaju $u(t)$ m/s pada hujung B. Biarkan $\ell = 20000$ m, $w = 1200$ m, $d = 15$ m, $a = 1.00$ m dan $\sigma = 2\pi/T$ di mana $T = 12$ jam. Cari $Q(t)$ dan $u(t)$.

- oooOooo -