Final Examination
2017/2018 Academic Session

May/June 2018

**JIM421/JIM503 – Modern Algebra**
***[Aljabar Moden]***

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **SEVEN** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*

*Jawab **SEMUA** soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

*Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.*

*Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.*

*Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.*

…2/-

1. (a). Define the relation between two sets *A* and *B*. Hence express the function $f(x) = x^3, x \in \mathrm{R}$ in terms of a relation.

(20 marks)

(b). Complete the table so that * is a commutative binary operation on the set $S = \{a, b, c, d\}$.

| * | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | *b* | | | |
| *b* | *d* | *a* | | |
| *c* | *a* | *c* | *d* | |
| *d* | *a* | *b* | *b* | *c* |

(20 marks)

(c). Define $U = \{z \in C \mid |z| = 1\}$ and $U_n = \{z \in C \mid z^n = 1\}$. Show that both $U$ and $U_n$ are groups.

(40 marks)

(d). Argue whether $\mathrm{Z}^+$ under multiplication is a group or not.

(20 marks)

2. (a). Consider $\mathrm{Z}$ under addition.

(i). Prove that it is a group.

(ii). Prove that it is also a cyclic group.

(iii). What are its generators?

(iv). Find $\langle 3 \rangle$. What is its designated denotation?

(v). Prove that (iv). is a cyclic subgroup of $\mathrm{Z}$ under addition.

(vi). Why is $6\mathrm{Z}$ < (iv).?

(60 marks)

(b). Consider $Z_5$ under addition.

(i). Prove that it is a group.

(ii). Prove that it is also a cyclic group.

(iii). What are its generators?

(25 marks)

(c). Find quotient $q$ and remainder $r$ when 38 is divided by 7 according to the division algorithm.

(15 marks)

3. (a). Let *A* be $\{1,2,3\}$ and $S_3$ be represented by the following subscripted Greek letters.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i). Construct the multiplication table for $S_3$.

(ii). Show that $S_3$ is nonabelian.

(30 marks)

(b). Consider the cycles $(1,4,5,6)$ and $(2,1,5)$ in $S_6$.

(i). Obtain the permutations from the products of these two cycles.

(ii). Argue whether the permutations in (i). are cycles or not.

(30 marks)

(c). Consider the group $Z_6$.

(i). Show that it is abelian.

(ii). Find the partition of $Z_6$ into cosets of the subgroup $H = \{0,3\}$.

(40 marks)

4. (a). Let $\phi : G \to G'$ be a group homomorphism of $G$ onto $G'$. Prove that if $G$ is abelian then $G'$ is also abelian.

(30 marks)

(b). Classify the group $\left(\mathrm{Z}_4 \times \mathrm{Z}_2\right)/\left(\{0\} \times \mathrm{Z}_2\right)$ according to the fundamental theorem of finitely generated abelian groups.

(30 marks)

(c). Prove that $\langle n\mathbf{Z},+,.\rangle$ is a ring.

(40 marks)

5. (a). Find the characteristics of the following rings: $\mathrm{Z}_n, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ and $\mathrm{C}$.

(30 marks)

(b). Let $F$ be a field of quotients of $D$ and let $L$ be a field containing $D$. Then prove there exists a map $\psi : F \to L$ that gives an isomorphism of $F$ with a subfield of $L$ such that $\psi(a) = a$ for $a \in D$.

(40 marks)

(c). Why is $n\mathrm{Z}$ an ideal in the ring $\mathrm{Z}$?

(30 marks)

1. (a). Takrifkan hubungan di antara dua set *A* dan *B*. Seterusnya nyatakan fungsi $f(x) = x^3, x \in \mathrm{R}$ di dalam sebutan suatu hubungan.

(20 markah)

(b). Lengkapkan jadual supaya * adalah suatu operasi binari kalis tukar tertib ke atas set $S = \{a, b, c, d\}$.

| * | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | *b* | | | |
| *b* | *d* | *a* | | |
| *c* | *a* | *c* | *d* | |
| *d* | *a* | *b* | *b* | *c* |

(20 markah)

(c). Takrifkan $U = \{z \in C \,|\, |z| = 1\}$ dan $U_n = \{z \in C \,|\, z^n = 1\}$. Tunjukkan bahawa kedua-dua $U$ dan $U_n$ adalah kumpulan.

(40 markah)

(d). Bahas sama ada $\mathrm{Z}^+$ di bawah hasil darab ialah suatu kumpulan ataupun bukan.

(20 markah)

2. (a). Pertimbangkan $\mathrm{Z}$ di bawah penambahan.

(i). Buktikan bahawa ini adalah kumpulan.

(ii). Buktikan juga ini adalah kumpulan kitar.

(iii). Apakah penjana-penjana yang ada?

(iv). Cari $\langle 3 \rangle$. Apakah denotasi yang ditetapkan untuk $\langle 3 \rangle$?

(v). Buktikan bahawa (iv). adalah suatu subkumpulan kitar untuk $\mathrm{Z}$ di bawah penambahan.

(vi). Kenapakah $6\mathrm{Z}$ < (iv).?

(60 markah)

- 6 -

(b). Pertimbangkan $Z_5$ di bawah penambahan.

(i). Buktikan bahawa ini adalah kumpulan.

(ii). Buktikan juga bahawa ini adalah kumpulan kitar.

(iii). Apakah penjana-penjana yang ada?

(25 markah)

(c). Cari hasil bahagi $q$ dan baki $r$ apabila 38 di bahagikan oleh 7 menurut algoritma pembahagian.

(15 markah)

3. (a). Andaikan *A* ialah $\{1,2,3\}$ dan $S_3$ diwakili oleh huruf-huruf Yunani bersubskrip berikut.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i). Binakan jadual pendaraban bagi $S_3$.

(ii). Tunjukkan bahawa $S_3$ bukan abelan.

(30 markah)

(b). Pertimbangkan kitaran-kitaran $(1,4,5,6)$ dan $(2,1,5)$ di dalam $S_6$.

(i). Dapatkan pilihatur-pilihatur daripada hasil-hasil darab kedua-dua kitaran ini.

(ii). Bahaskan bahawa pilihatur-pilihatur di dalam (i). adalah kitaran ataupun bukan.

(30 markah)

(c). Pertimbangkan kumpulan $Z_6$.

(i). Tunjukkan bahawa kumpulan ini abelan.

(ii). Cari partisi bagi $Z_6$ di dalam koset-koset subkumpulan $H = \{0,3\}$.

(40 markah)

4. (a). Biarkan $\phi : G \to G'$ menjadi suatu homomorfisme kumpulan bagi $G$ ke atas $G'$. Buktikan bahawa jika $G$ abelan maka $G'$ juga abelan.

(30 markah)

(b). Kelaskan kumpulan $(Z_4 \times Z_2)/(\{0\} \times Z_2)$ menurut teorem asas kumpulan-kumpulan abelan terjana secara terhingga.

(30 markah)

(c). Buktikan bahawa $\langle n\mathbf{Z},+,.\rangle$ ialah suatu gelanggang.

(40 markah)

5. (a). Cari ciri-ciri gelanggang-gelanggang berikut: $Z_n, Z, Q, R$ dan $C$.

(30 markah)

(b). Biarkan $F$ menjadi suatu medan hasil bahagi bagi $D$ dan biarkan $L$ menjadi suatu medan yang mengandungi $D$. Maka buktikan kewujudan suatu peta $\psi : F \to L$ yang memberikan suatu isomorfisme bagi $F$ dengan suatu submedan bagi $L$ supaya $\psi(a) = a$ untuk $a \in D$.

(40 markah)

(c). Kenapakah $nZ$ merupakan suatu ideal di dalam gelanggang $Z$ ?

(30 markah)

- oooOooo -