Final Examination
2017/2018 Academic Session

May/June 2018

JIM419 – Complex Variables
[Pembolehubah Kompleks]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **SEVEN** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ***TUJUH*** *muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan.*

Jawab ***SEMUA*** *soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.

1. (a). Reduce the expression $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ to a real number.

(25 marks)

(b). Express $\dfrac{(1-i)^{23}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{13}}$ in the form $re^{i\theta}, r>0, -\pi \leq \theta < \pi.$

(25 marks)

(c). Find all the complex roots of $z^6 = -9$, where $z = x + iy$.

(25 marks)

(d). Use exponential form to compute $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2011}$.

(25 marks)

2. (a). Let $f(x) = \sqrt{|xy|}$, where $z = x + iy$.

(i). Show that *f* is not differentiable at origin.

(ii). Show however that the Cauchy-Riemann equations are satisfied at the origin

(50 marks)

(b). Let $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ with $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a holomorphic function and that

$$2u(x,y) + v(x,y) = 5 \text{ for all } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Show that *f* is constant.

(50 marks)

3. (a). The function $\dfrac{z^3}{z^2+3z-4}$ has a power series expansion in a neighbourhood of the origin. What is its radius of convergence?

(30 marks)

(b). Consider the power series

$$p(z)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

(i). Show that $p(1)$ is a convergent series.

(ii). Compute $p'(z)$ and use it to determine the value of $p(1)$.

(70 marks)

4. (a). Write down the first three terms of the Laurent expansion of

$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ in the annulus $1<|z|<2$.

(40 marks)

(b). Let $f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin z}$. Find the residue at $z=0$.

(30 marks)

(c). Let $f(z)=\dfrac{3}{z-1}$. Consider the contour $2e^{i\theta},0\le t\le 2\pi$. Use Cauchy Residue Theorem to evaluate $\int_C f\,dz$.

(30 marks)

5. (a). Let $\gamma = i + e^{-it}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(i). Draw γ.

(ii). From the definition

$$\int_{\gamma} f = \int_{a}^{b} f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,dt,$$

calculate $\int \frac{dz}{(z-i)^3}$.

(50 marks)

(b). Let $f(z) = |z+1|^2$. Let $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$, be the path that describes the unit circle with centre 0, anticlockwise.

(i). Show that *f* is not holomorphic on any domain that contains γ.

(ii). Use Cauchy Integral formula to show that

$$\int_{\gamma} |z+1|^2\,dz = 2\pi i.$$

(50 marks)

1. (a). Perturunkan ungkapan $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ kepada satu nombor nyata.

(25 markah)

(b). Ungkapkan $\dfrac{(1-i)^{23}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{13}}$ dalam bentuk $re^{i\theta}, r>0, -\pi \le \theta < \pi.$

(25 markah)

(c). Dapatkan semua punca kompleks untuk $z^6 = -9$, dengan $z = x+iy$.

(25 markah)

(d). Gunakan bentuk eksponen untuk menghitung $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2011}$.

(25 markah)

2. (a). Biarkan $f(x) = \sqrt{|xy|}$, dengan $z = x+iy$.

(i). Tunjukkan bahawa f tak terbezakan pada asalan.

(ii). Sebaliknya, tunjukkan bahawa persamaan Cauchy-Riemann dipenuhi pada asalan.

(50 markah)

(b). Biarkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dengan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satu fungsi holomorfi dan bahawa

$2u(x,y) + v(x,y) = 5$ untuk semua $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

Tunjukkan bahawa f satu pemalar.

(50 markah)

3. (a). Fungsi $\dfrac{z^3}{z^2+3z-4}$ mempunyai satu kembangan siri kuasa dalam satu jiranan asalan. Apakah jejari penumpuan?

(30 markah)

(b). Pertimbangkan siri kuasa

$$p(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

(i). Tunjukkan bahawa $p(1)$ adalah satu siri menumpu.

(ii). Hitung $p'(z)$ dan gunakan untuk menentukan nilai $p(1)$.

(70 markah)

4. (a). Tuliskan tiga sebutan pertama untuk kembangan Laurent bagi

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \text{ dalam anulus } 1 < |z| < 2.$$

(40 markah)

(b). Biarkan $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$. Dapatkan reja pada $z = 0$.

(30 markah)

(c). Biarkan $f(z) = \dfrac{3}{z-1}$. Pertimbangkan kontur $2e^{i\theta}, 0 \le t \le 2\pi$. Gunakan Teorem Reja Cauchy untuk menilaikan $\int_C f\,dz$.

(30 markah)

5. (a). Biarkan $\gamma = i + e^{-it}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(i). Lakarkan γ.

(ii). Daripada takrif

$$\int_\gamma f = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,dt,$$

nilaikan $\int \frac{dz}{(z-i)^3}$.

(50 markah)

(b). Letakkan $f(z) = |z+1|^2$, $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$, sebagai lintasan yang memperihalkan bulatan unit berpusat 0, dalam lawan arah jam.

(i). Tunjukkan bahawa f tak holomorfi atas sebarang domain mengandungi γ.

(ii). Gunakan rumus Kamiran Cauchy untuk menunjukkan bahawa

$$\int_\gamma |z+1|^2\,dz = 2\pi i.$$

(50 markah)

- oooOooo -