MEREKA-BENTUK LENGKUNG TIMMER SELANJAR G^2 SECARA ITERATIF

[1]R. Gobithasan & [2]Jamaludin M.A

[1]Dept Of Mathematics, Fst, Kustem,
Mengabang Telipot, 21030,
Kuala Terengganu, Malaysia

[2]School Of Mathematical Sciences,
Universiti Sains Malaysia,
11800, Minden, Penang, Malaysia

Mel-e [1]gobithasan@kustem.edu.my, [2]jamaluma@cs.usm.my

ABSTRAK

Aspek keselanjaran geometri G^2 diteliti dalam kertas kerja ini disebabkan pentingnya membentuk 'fair curve' untuk proses pembuatan bahan seperti badan kereta atau kapal, trajektori robot dan sebagainya. Apabila terdapat bilangan titik interpolasi yang banyak, pembentukan data G^2 untuk set titik itu menjadi sukar. Oleh itu, Satu algoritma am telah diusahakan untuk membentuk lengkung Timmer selanjar G^2 secara automatik untuk set data yang diberikan. Algoritma ini akan mengira unit tangen vektor dan kelengkungan secara iteratif bagi titik interpolasi yang diberikan.

Kata kunci* : *lengkung Timmer cebis demi cebis, keselanjaran geometri G^2, interpolasi, keselanjaran kelengkungan.

1. Pengenalan

Harry Timmer dari McDonnell Douglas adalah pengasas lengkung Timmer parametrik kubik. Timmer(1980) telah memperbaiki lengkung Bezier dengan memastikan lenkung tersebut mengikut poligon kawalan dengan lebih rapat. Walau bagaimanapun, pereka-bentuk tidak tertarik dengan lengkung Timmer kerana lengkung Timmer tidak memuaskan syarat entiti hul cembung. Namun demikian, lengkung lain yang senantiasa dikaji adalah lengkung Bezier, Ball, β-Spline dan NURBS.

Keselanjaran geometri merupakan salah satu bidang dalam rekabentuk geometri berasaskan computer (CAGD) yang pesat dikaji. Mereka-bentuk lengkung G^2 dan permukaan untuk perisian CAD merupakan masalah yang telah dihadapi untuk jangka masa yang panjang. Usaha awal dalam menangani masalah ini boleh diperolehi daripada Meek(2002), Sollig & Koch (1996) dan Goodman & Unsworth (1988). Kajian ini mencadangkan satu algoritma untuk membentuk lengkung Timmer dengan keselanjaran G^2 yang mengintepolasi set titik yang diberikan. Algoritma ini dapat mengira data G^2 secara iteratif untuk membentuk lengkung Timmer cebis demi cebis bagi set titik yang diberikan Dalam bahagian terakhir, kelebihan algoritma yang dicadangkan diterangkan dengan lanjut melalui contoh berangka

2. Kubik Parametrik Timmer

Timmer(1980) mereka *kubik parametrik Timmer* dengan memanipulasi lengkung Bezier. Beliau memaksa lengkung tersebut menginterpolasi titik pertama dan titik akhir serta menjadi tangen dengan poligon kawalan itu pada titik-titik tersebut Sebagai tambahan, beliau juga memaksa lengkung tersebut untuk melalui titik tengah segmen garisan P_{i1}- P_{i2}

Andaikan $P_i(x_i, y_i)$, $P_{i,1}(x_{i,1}, y_{i,1})$, $P_{i,2}(x_{i,2}, y_{i,2})$ dan $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ diwakili sebagai titik kawalan lengkung Timmer, $H_i(t)$. Maka, kubik parametrik Timmer boleh ditulis sebagai

$$\begin{aligned} H_i(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (1-2t)(1-t)^2 P_i + 4t(1-t)^2 P_{i1} + 4t^2(1-t)P_{i2} + (2t-1)t^2 P_{i+1} \end{aligned} \qquad (1)$$

yang $0 \le t \le 1$. Ciri-ciri lengkung Timmer [Lihat Gobithasan (2004) & Gobithasan & Jamaludin (2004)] adalah.

- sistem koordinat bebas,
- tidak mematuhi entiti hul cembung, CHP
- tidak mematuhi entiti 'variation diminishing', VDP
- simetri,
- tidak berubah bentuk di bawah transfomasi,
- menginterpolasi titik hujung dan titik tengah P_{i1}-P_{i2}.

Boleh dirumuskan bahawa lengkung Timmer bersifat setara dengan lengkung Bezier dan β-spline kecuali untuk syarat CHP, VDP dan mempunyai interpolasi tambahan pada titik tengah P_{i1}-P_{i2}

Kaedah alternatif untuk membentuk lengkung Timmer adalah melalui penggunaan titik kawalan hujung iaitu P_i dan P_{i+1}, dan unit tangent vector masing-masing $T_i(M_i, N_i)$ dan $T_{i+1}(M_{i+1}, N_{i+1})$ bagi mengira titik P_{i1} dan P_{i2}.. Ini dapat dilakukan dengan menggunakan Pers (2)

$$\begin{aligned} P_{i1}(x_{i1}, y_{i1}) &= \left(x_i + \frac{1}{\alpha_i} M_i,\ y_i + \frac{1}{\alpha_i} N_i\right) \\ P_{i2}(x_{i2}, y_{i2}) &= \left(x_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} M_{i+1},\ y_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} N_{i+1}\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

yang α_i ialah nombor nyata positif Kelebihan kaedah ini adalah seseorang dapat mengawal arah lengkung Timmer hanya dengan mngawal vektor tangen unit yang diberikan

2.1. Penganggaran vektor tangen unit

Vektor tangen unit pada titik interpolasi boleh didefinisikan oleh pereka-bentuk secara interaktif Sarfraz & Razzak (2002) telah memperkenalkan satu kaedah pilihan berasaskan jarak untuk vektor tangen bagi lengkung terbuka dengan menggunakan titik interpolasi (Sila rujuk Sarfraz & Razzak (2002) jika lengkung tertutup diperlukan). Persamaan untuk memperoleh vektor tangen pada setiap titik interpolasi diberikan dalam Pers. (3)-(5).

$$D_0 = 2(P_1 - P_0) - \frac{(P_2 - P_0)}{2} \tag{3}$$

$$D_n = 2(P_n - P_{n-1}) - \frac{(P_n - P_{n-2})}{2} \tag{4}$$

$$D_i = a_i(P_i - P_{i-1}) + (1 - a_i)(P_{i+1} - P_i) \tag{5}$$

yang
$$a_i = \frac{\|P_{i+1} - P_i\|}{\|P_{i+1} - P_i\| + \|P_i - P_{i-1}\|} \tag{6}$$

bagi i=1, 2, . ., n-1. Pers. (3) mewakili vektor tangen di P_0, Pers (4) mewakili vektor tangen di titik akhir, P_n dan akhirnya Pers. (5) mewakili vektor tangen untuk P_1 sehinga P_{n-1} Dalam kertas kerja ini, vektor tangen unit digunakan untuk menentukan arah tuju lengkung. Oleh demikian, vektor tangen unit di setiap titik interpolasi dikira mengikut Pers. (7)-(9).

$$T_0 = (M_0, N_0) = \frac{D_0}{\|D_0\|} \tag{7}$$

$$T_n = (M_n, N_n) = \frac{D_n}{\|D_n\|} \tag{8}$$

$$T_i = (M_i, N_i) = \frac{D_i}{\|D_i\|} \tag{9}$$

yang i=1, 2, .. , n-1.

2.2. Terbitan Pertama Dan Kedua Bagi Kubik Parametrik Timmer

Dengan menggunakan Pers (1) dan (2), Pers. (10) diperoleh Maka, setiap lengkung Timmer, $H_i(t)$, dikawal oleh satu pembolehubah, contohnya α_i.

$$H_i(t)=\frac{P_i\alpha_i+t\{4(t-1)[T_i(t-1)+T_{i+1}t]+t\alpha_i(2t-1)(P_i-P_{i+1})\}}{\alpha_i} \tag{10}$$

Terbitan pertama dan kedua bagi $H_i(t)$ adalah seperti Pers (11) and (12) masing-masing

$$H_i'(t)=\frac{4[P_i-2(2T_i+T_{i+1})t+3(T_i+T_{i+1})t^2]+6t(t-1)(P_i-P_{i+1})\alpha_i}{\alpha_i} \tag{11}$$

$$H_i''(t)=\frac{-8(2T_i+T_{i+1})+24(T_i+T_{i+1})t+6\alpha_i(2t-1)(P_i-P_{i+1})}{\alpha_i} \tag{12}$$

3. Skema G^2 Iteratif

3.1. Data G^2

Data G^2 merangkumi satu set titik, vektor tangen unit bagi titik-titik tersebut dan kelengkungan pada setiap titik berkenaan. Lengkung G^2 merupakan lengkung yang melalui titik yang diberikan, sepadan dengan vektor tangen unit dan kelengkungan yang diberikan pada setiap titik berkenaan [Meek(2002), Meek & Walton (1998)]. Rumus kelengkungan [Farin(1989a, 1989b, 1997)], ditakrif dalam 2D sebagai

$$\begin{aligned}\kappa_i(t)&=\frac{H_i'(t)\times H_i''(t)}{\|H_i'(t)\|^3}\\[1ex]&=\frac{(x'(t),y'(t))\times(x''(t),y''(t))}{(\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,)^3}\\[1ex]&=\frac{(x'(t)\,y''(t))-(x''(t)\,y'(t))}{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{3/2}}\end{aligned} \tag{13}$$

Kelengkungan diberikan tanda positif jika bulatan kelengkungan berada pada kiri lengkung dan tanda negatif jika bulatan kelengkungan berada pada kanan [Meek(2002)] Jejari bulatan bagi suatu kelengkungan, R_i, ialah nilai mutlak salingan Pers (13)

3.2. Skema iteraktif untuk membentuk lengkung Timmer selanjar G^2

Pada bahagian ini, satu skema baru diperkenalkan untuk memperoleh lengkung Timmer secara cebis demi cebis yang selanjar G^2 Titik data ialah satu set titik dalam koordinat Kartesan dimana titik-titik ini adalah dalam bentuk $P_i(x_i, y_i)$

untuk i=0, 1, , n Keselanjaran G^2 adalah tidak sah di P_i jika P_i, P_{i+1}, P_{i+2} (atau P_i, P_{i-1}, P_{i-2}) adalah kolinear [4] Adalah mudah untuk mendefinasikan data G^2 bagi membentuk lengkung Timmer selanjar G^2 apabila bilangan titik interpolasi adalah kecil Ini merupakan kaedah interaktif yang berupa konvensional Namun, jika terdapat bilangan titik yang banyak, pembentukan data G^2 untuk titik intepolasi tersebut menjadi sukar. Oleh itu, bahagian ini membincangkan satu algoritma bagi mengatasi masalah tersebut.

Kelengkungan diberikan sebagai Pers (13), dan dengan menggunakan Pers. (11) dan (12), persamaan kelengkungan kini menjadi seperti Pers (14)

$$\kappa_i(t)=\frac{\begin{array}{c}8\{4M_{i+1}N_i[1+3(t-1)t]-4M_iN_{i+1}[1+3(t-1)t]+3[N_i(t-1)^2\\ -N_{i+1}t^2](x_i-x_{i+1})\alpha_i-3M_i(t-1)^2(y_i-y_{i+1})\alpha+3M_{i+1}t^2(y_i-y_{i+1})\alpha_i\}\end{array}}{\begin{array}{c}\alpha_i^2\{\alpha_i^2\{\{4[M_i-2(2M_i+M_{i+1})t+3(M_i+M_{i+1})t^2]+6(t-1)t(x_i-x_{i+1})\alpha_i\}^2\\ +\{4[N_i-2(2N_i+N_{i+1})t+3(N_i+N_{i+1})t^2]+6(t-1)t(y_i-y_{i+1})\alpha_i\}^2\}\}^{3/2}\end{array}} \tag{14}$$

Apabila t=0, $\kappa_i(t)$ menjadi:

$$\kappa_i(0)=\frac{\alpha_i}{8}\{4M_{i+1}N_i-4M_iN_{i+1}+3[N_0(x_i-x_{i+1})+M_i(y_{i+1}-y_i)]\alpha_i\} \tag{15}$$

Apabila t=1, $\kappa_i(t)$ menjadi.

$$\kappa_i(1)=\frac{\alpha_i}{8}\{N_i[3\alpha_i(x_{i+1}-x_i)-4M_i\}]+M_{i+1}[4N_i+3(y_i-y_{i+1})\alpha_i]\} \tag{16}$$

Langkah pertama yang diambil adalah untuk menetapkan α_0 sebagai nombor nyata yang bernilai positif. Dengan menggantikan α_0, kita boleh mengira $\kappa_0(1)$ dengan Pers (16).

Misalkan:

$$\kappa_i(0)=\kappa_{i-1}(1) \tag{17}$$

yang i=1, 2, ..., n. Dengan menggunakan Pers (15) dan (17), Pers (18) diperoleh dalam bentuk kuadratik:

$$a\alpha_i^2+b\alpha_i+c=0 \tag{18}$$

yang

$$a=\frac{3}{8}[N_i(x_i-x_{i+1})+M_i(y_{i+1}-y_i)]$$

$$b = \frac{1}{2}(M_{i+1}N_i - M_iN_{i+1}) \text{ dan}$$

$$c = -\kappa_{i+1}(1)$$

untuk i=1, 2, . . n Oleh itu Pers (18) mempunyai punca nyata bila $b^2 - 4ac \geq 0$ Namun demikian, hanya punca positif yang diperlukan Syarat ini dapat membantu memeriksa kembali samada terdapat penyelesaian untuk membentuk lengkung Timmer keselanjaran G^2 untuk titik data yang diberikan Jika tiada penyelesaian bagi suatu cebis, maka kaedah konvensional dapat diterapkan

Penyelesaian am untuk α_i, yang i=1, 2, . . ., n diberikan dalam Pers. (19)·

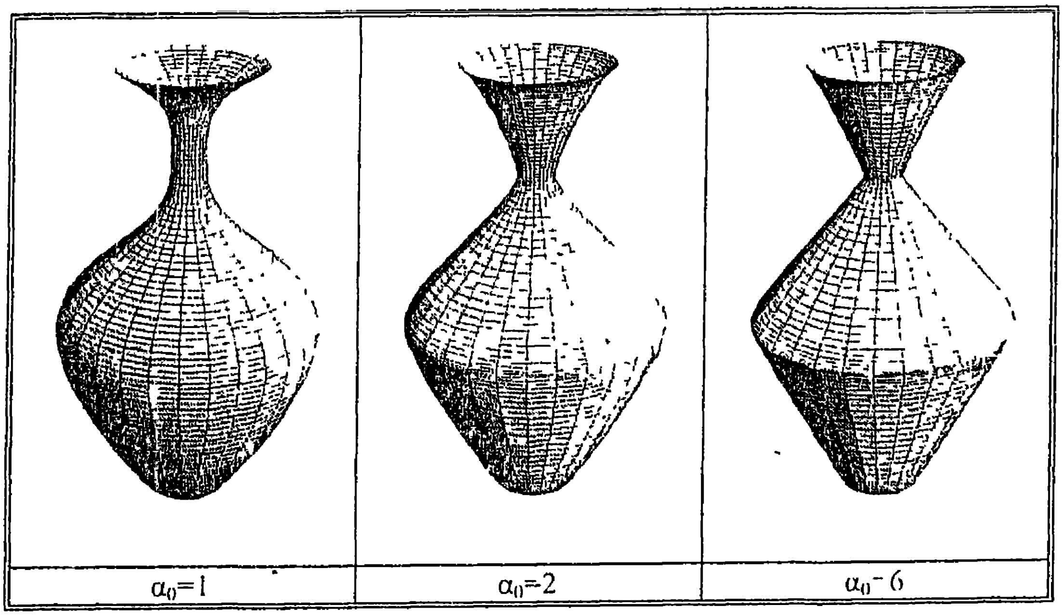
$$\alpha_i = \frac{4[\kappa_{i+1}(1)]}{(M_{i+1}N_i - M_iN_{i+1}) \pm \sqrt{(M_{i+1}N_i - M_iN_{i+1})^2 + 6[\kappa_{i+1}(1)][N_i(x_i - x_{i+1}) + M_i(y_{i+1} - y_i)]}} \qquad (19)$$

Akhirnya satu penyelesaian dengan α_i sebagai nombor nyata positif, jika wujud dipilih untuk membentuk lengkung $H_i(t)$ menggunakan Pers (19) dan (10) Algoritma am untuk membentuk lengkung Timmer keselanjaran G^2 ditunjukkan dibawah

(1) **Untuk i=0 hingga n buat**
Definisikan $P_i(x_i, y_i)$,
kira $T_i(M_i, N_i)$ menggunakan Pers (7)-(9),
(2). definisikan α_0,
kira $\kappa_0(1)$ menggunakan Pers (16);
bentuk lengkung, $H_0(t)$, dengan $0 \leq t \leq 1$ dimana $H_0(t)$ diberikan oleh Pers. (10) ,
(3). **Untuk i=1 hingga n-1 buat**
Selesaikan persamaan (19) untuk memperoleh α_i;
pilih α_i dengan nombor positif nyata,
bentuk lengkung, $H_i(t)$, dengan $0 \leq t \leq 1$ dimana $H_i(t)$ diberi oleh Pers. (10) ;

4. Contoh Berangka : Profil Pasu Bunga

Dalam bahagian ini, empat titik interpolasi disambung dengan keselanjaran G^2 untuk memperoleh profil sebuah pasu bunga Titik-titik tersebut adalah seperti berikut. $P_0 = (1,0), P_1 = (3\ 5,5), P_2 = (0\ 5,9)\ dan\ P_3 = (2,12)$. Algoritma yang dicadangkan dalam kertas kerja ini diaplikasikan untuk menunjukkan kelebihannya Profil pasu ini kemudian diputar pada satah-y untuk memperoleh permukaan pasu Algoritma ini hanya memerlukan titik data untuk membentuk lengkung Timmer keselanjaran G^2. α_0 yang berlainan diberikan untuk mendapatkan lengkung yang berbeza dari segi bentuk Permukaan revolusi yang dihasilkan adalah seperti dalam **Rajah 1**



Rajah 1: Algoritma iteratif menghasilkan lengkung Timmer selanjar G^2 yang bersifat global, (dari kiri) $\alpha_0=1$, $\alpha_0=2$ dan $\alpha_0=6$

Adalah ketara bahawa jika α_0 menokok hingga 10, lengkung selanjar G^2 menyusut kepada garisan yang menyambungkan titik interpolasi dan jika α_0 menyusut kepada 1, lengkung itu mengembang. Oleh itu, kelebihan algoritma ini adalah vektor tangen unit dan kelengkungan pada titik interpolasi dikira secara iteratif. Namun, algoritma ini menghasilkan lengkung Timmer yang bersifat global dengan suatu cebis khas tidak dapat dimodifikasi. Jika modifikasi untuk sesuatu cebis diperlukan, kaedah konvensional boleh dilaksanakan dengan data G^2 untuk cebis tersebut dibentuk secara interaktif.

5. Kesimpulan

Dalam kajian ini, algoritma untuk meghasilkan lengkung Timmer cebis demi cebis yang selanjar G^2 secara automatik dicadangkan. Kelebihan algoritma ini diterangkan pada bahagian akhir dengan berpandukan profil sebuah pasu. Pereka-bentuk tidak menyedari akan kecekapan lengkung Timmer dan tidak ingin menggunakan lengkung ini kerana tidak memenuhi syarat entiti hul cembung. Kelebihan lengkung Timmer adalah ianya memintas bahagian tengah garisan yang menyambung $P_{i,1}$ hingga $P_{i,2}$ boleh digunakan sebagai titik interpolasi tambahan oleh pereka bentuk untuk menghasilkan lengkung cebis demi cebis dengan efisien.

6. Penghargaan

Penulis pertama ingin merakamkan setinggi terima kasih kepada pihak KUSTEM yang sedang menaja pembelajaran peringkat Ph.D. beliau di Universiti Sains Malaysia Kedua-dua penulis juga ingin merakamkan terima kasih kepada pihak USM yang telah menyediakan perisian MATHEMATICA® 5 0 yang digunakan dalam kajian ini

Rujukan

[1] Timmer, H G. (1980). Alternative representation of parametric cubic curves and surfaces, *Computer Aided Design*, **12** (1), 25-28.

[2] Meek, D S (2002) Coaxing a planar curve to comply, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **140**, 599-618.

[3] Sollig, K.H. & Koch, J. (1996). Geometric hermite interpolation with maximal order and smoothness, *Computer Aided Geometric Design*, **13**, 681–695.

[4] Goodman, T.N.T. & Unsworth, K. (1988). Shape preserving interpolation by curvature continuous parametric curves, *Computer Aided Geometric Design*, **5**, 323-340.

[5] Gobithasan, R. (2004). Designing geometrically continuous curves using Timmer parametric cubic, MSc. Thesis (2004) School of Mathematical Sciences, University Science Malaysia.

[6] Gobithasan, R. & Jamaludin, M A. (2004). Towards G^2 Curve design with Timmer Parametric Cubic. *Proceedings of International Conference On Computer Graphics, Imaging and Visualization*, CGIV04, IEEE Computer Society, 109-114.

[7] Sarfraz, M. & Razzak, M.F.A (2002) An Algorithm for Automatic Capturing of The Font Outlines. *Computer & Graphics*, **26**, 795-804.

[8] Meek, D S & Walton, D J. (1998) Planar Spirals that Match G^2 Hermite Data. *Computer Aided Geometric Design* **15** , 103-126

[9] Farin, G. (1989a). Trends in curve and surface design. *Computer Aided Design*, **12** (5) , 293-296.

[10] Farin, G (1989b). Curvature and the fairness of curves and surfaces in *IEEE Computer Graphics & Applications*. 9 (2), 52-57.

[11] Farin, G (1997). *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 4th edn, San Diego, Academic Press Inc

MATEMATIK DAN MASYARAKAT

Prosiding Seminar Matematik dan Masyarakat
26 – 27 Februari 2005

Jabatan Matematik,
Fakulti Sains dan Teknologi,
Kolej Universiti Sains dan Teknologi Malaysia
(KUSTEM)

dan

Persatuan Sains Matematik Malaysia
(PERSAMA)

2005

		(c) 1/6	Scorang dırı atau lcbıh dan bcısama scorang saudara pcrcmpuan scıbu scbapa (untuk mclcngkapkan 2/3) atau tıdak ada saudara lclakı scbapa, atau tıdak ada bapa atau datuk atau anak
		(d) Asabah bılghaırıh	Bcrsama-sama saudara lclaki scbapa
		(e) Asabah maalghaırıh	Apabıla bcrsama salah scorang anak pcrcmpuan atau anak pcrcmpuan kcpada anak lclakı, dua atau lcbıh atau bcrsama kcdua-dua sckalı.
		(f) Tcrdindıng	Olch anak lclakı atau anak lclakı kcpada anak lclakı atau saudara lclakı scıbu scbapa atau dua orang saudara pcrcmpuan scıbu scbapa atau lcbıh (kccualı ada saudara lclakı scbapa) atau scorang saudara pcrcmpuan scıbu scbapa kctıka dıa mcncrıma asabah maalghaırıh
11.	Saudara pcrcmpuan scıbu dan saudara lclakı scıbu	(a) 1/6	Scoıang dırı dan tıdak ada anak atau bapa atau datuk
		(b) 1/3	Dua orang atau lcbıh dan tıdak ada anak lclakı atau anak lclakı kcpada anak lclakı, bapa atau datuk
		(c) Tcrdındıng	Olch anak lclakı atau anak lclakı kcpada anak lclakı, olch bapa atau datuk

Terdinding : Tidak mendapat harta

Asabah : Menghabisi harta

Asabah bilghairih : Menghabisi harta dengan sebab ada orang lelakı lain

Asabah maalghairih : Menghabisi harta dengan sebab ada orang perempuan laın seperti sdr. Perempuan dan saudara perempuan sebapa (berkongsi dengan anak perempuan dan cucu perempuan)

Sumber : Dr. Wahbah al-zuhaıli, al-Fiqh al-Islami wa adillatuh hım 290-331; Abu Bakar Jabir al-Jaza 'ri, Mınhaj al-muslim, (Dar al-Fıkir, 1976), jlm. 405-407.