

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang Akademik 2003/2004

September / Oktober 2003

**MAT 263 – TEORI KEBARANGKALIAN**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM [6]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

...2/-

1. (a) Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian untuk pembolehubah rawak X jenis diskrit diberi oleh :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & x = -2, -1, 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- i. Tentukan fungsi taburan longgokan  $F(x)$
- ii. Cari Jangkaan X
- iii. Lakarkan graf  $p(x)$  dan  $F(x)$

[15 markah]

- (b) Fungsi taburan longgokan untuk pembolehubah rawak X jenis selanjar diberi oleh:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{8}, & 0 \leq x < 2 \\ x - \frac{x^2}{8} - 1, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

- i. Tentukan rumus untuk fungsi ketumpatan kebarangkalian X
- ii. Cari jangkaan X
- iii. Cari kebarangkalian  $1 < x \leq 3$
- iv. Lakarkan graf untuk  $f(x)$  dan  $F(x)$

[20 markah]

- (c) Suatu Bank tertentu mengklasifikasikan pelanggan sebagai mempunyai risiko kredit rendah atau tinggi. Berdasarkan data yang lepas, sebanyak 1 % daripada pelanggan berisiko kredit rendah dan sebanyak 10 % daripada pelanggan berisiko kredit tinggi mengeluarkan wang yang lebih daripada yang ada dalam akaun mereka untuk suatu bulan tertentu. Seorang pelanggan baru membuka suatu akaun di bank itu. Andaikan bahawa bank tersebut berpendapat bahawa terdapat kemungkinan sebanyak 70% bahawa pelanggan itu akan mempunyai risiko kredit yang rendah. Jika pelanggan ini mengeluarkan wang yang melebihi jumlah dalam akaunnya pada bulan yang pertama, bagaimana pendapat bank tentang kedudukan kredit pelanggan tersebut?. Apakah yang akan berlaku jika pelanggan itu mengeluarkan wang melebihi jumlah dalam akaunnya pada bulan yang kedua?

[30 markah]

- (d) Suatu kolej memperhatikan bahawa sebanyak 25 % daripada pelajar barunya adalah tidak berkelayakan dan akan meninggalkan kolej dalam masa 4 bulan yang pertama. Untuk membolehkan kolej tersebut membuat ramalan yang lebih jitu tentang kejayaan pelajar, kolej tersebut telah mengadakan pelbagai ujian untuk pelajar-pelajar barunya pada masa pendaftaran untuk beberapa tahun yang lepas. Kolej tersebut sedang mempertimbangkan salah satu daripada ujian tersebut untuk digunakan sebagai kriteria pemilihan pelajar baru. Untuk pasangan-pasangan ujian berikut apakah ujian yang perlu digunakan jika kolej tersebut ingin meminimumkan kemungkinan bahawa pelajar yang tidak berkelayakan dipilih?

Ujian apakah yang patut digunakan jika kolej itu ingin meminimumkan kemungkinan bahawa pelajar yang berkelayakan tidak dipilih?.

Ujian 1: 90 % pelajar baru yang berkelayakan terpilih  
80 % pelajar yang tidak berkelayakan tidak terpilih

Ujian 2: 85% pelajar baru yang berkelayakan terpilih  
90 % pelajar yang tidak berkelayakan tidak terpilih

[35 markah]

2. (a) Tentukan kebarangkalian bahawa dalam suatu kumpulan seramai 30 orang terdapat sekurang-kurangnya 2 orang dengan hari jadi yang sama.

[25 markah]

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian untuk suatu pembolehubah rawak selanjur diberikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Cari kebarangkalian  $X > 2$

[25 markah]

- (c) Pertimbangkan pembolehubah rawak  $Y$  yang diberi oleh  $Y = X^2 + 1$ , dengan  $X$  sebagai pembolehubah rawak eksponen dengan parameter  $\lambda$ . Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi  $X$  ialah:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Tentukan jangkaan  $Y$ .

[25 markah]

- (d) Suatu pembolehubah rawak selangar  $X$  mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Cari  $E(X)$  dan Varians  $X$

[25 markah]

3. (a) (i) Jika  $X$  ialah suatu pembolehubah rawak diskrit dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian berikut:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = -1 \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 2 \end{cases}$$

Cari fungsi penjana momen bagi  $X$

- ii. Fungsi penjana momen untuk pembolehubah rawak jenis diskrit ialah :

$$M_x(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{3t}$$

Cari kebarangkalian  $X > 1$

[30 markah]

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi pembolehubah rawak  $X$  diberi oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Cari fungsi penjana momen bagi  $X$

[20 markah]

- (c) Fungsi penjana momen  $M_X(t)$  untuk tiga pembolehubah rawak X jenis selanjar berikut:

i.  $M_X(t) = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right)$

ii.  $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^3$

iii.  $M_X(t) = \frac{3}{3-t}$

untuk setiap taburan diatas, cari min dan varians bagi X.

[30markah]

- (d) Andaikan X dan Y ialah pembolehubah rawak dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1-x-y), & x+y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tentukan fungsi taburan longgokan dan fungsi ketumpatan kebarangkalian untuk  $S = X+Y$

[20markah]

4. (a) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi vektor rawak  $X=(X_1, X_2)$  diberi oleh:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 + 1}{13}, & x_1 = 1, 2 \quad x_2 = 1, 2 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- i. Bina suatu jadual kontingensi untuk fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum p.
- ii. Tentukan fungsi ketumpatan kebarangkalian sut  $p(x_1), p(x_2)$ .
- iii. Adakah  $x_1$  dan  $x_2$  tak bersandar
- iv. Cari kebarangkalian  $X_1 + 2X_2 \geq 3$
- v. Apakah kebarangkalian  $X_1 X_2 > 1$ ?

[40markah]

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi vektor  $T = (T_1, T_2)$  dengan  $T_1$  dan  $T_2$  sebagai pembolehubah rawak positif ialah:

$$f(t_1, t_2) = t_2 e^{-t_1} e^{-t_2}, t_1 > 0, t_2 > 0$$

Cari kebarangkalian bahawa  $T_2 > T_1$

[20markah]

(c) Fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi X dan Y diberi oleh

$$f(x, y) = xe^{-x(y+1)}, x > 0, y > 0$$

- i. Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian sut  $f(x)$  dan  $f(y)$ .
- ii. Cari fungsi taburan longgokan  $F(x, y)$ .
- iii. Cari  $F(x)$  dan  $F(y)$
- iv. Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian bersyarat  $f(x|y)$  dan  $f(y|x)$

[25markah]

(d) Cari nilai  $k$  supaya  $F$  ialah fungsi taburan longgokan seperti berikut:

$$F(x, y) = kxy(2x + 3y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

[15markah]