UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2016/2017 Academic Session

May/June 2017

JIM 421 – Modern Algebra
[Aljabar moden]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **SEVEN** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ***TUJUH*** *muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*

Jawab ***SEMUA*** *soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.

1. (a) Find all cosets of the subgroup $\langle 2 \rangle$ of $\mathbf{Z}_{12}$.

(30 marks)

(b) Let H be a subgroup of a group G. Prove that if the partition of G into left cosets of H is the same as the partition into right cosets of H, then $g^{-1}hg \in H$ for all $g \in H$ and all $h \in H$.

(40 marks)

(c) Find the index of $\langle \mu_2 \rangle$ in the group D_4 given in the following table.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

(30 marks)

2. (a) Let G be any group and let a be any element of G. Let $\phi : \mathbf{Z} \rightarrow G$ be defined by $\phi(n) = a^n$. Show that ϕ is a homomorphism. Describe the image and the possibilities for the kernel of ϕ.

(30 marks)

(b) Let M_n be the additive group of all $n \times n$ matrices with real entries, and let $\mathbb{R}$ be the additive group of real numbers. Let $\phi(A) = \mathrm{tr}(A)$ for $A \in M_n$, where the trace $\mathrm{tr}(A)$ is the sum of the elements on the main diagonal of A, from the upper left to the lower right corner. Is ϕ a homomorphism?

(30 marks)

(c) (i) Given that H be a subgroup of a group G and the left coset multiplication is a well defined equation $(aH)(bH) = (ab)H$, show that $Ha \subseteq aH$.

(ii) Use (i) to prove that H is a normal subgroup of G if and only if left coset multiplication is a well defined equation $(aH)(bH) = (ab)H$.

(40 marks)

3. (a) Find the order of the factor group $\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle$.

(30 marks)

(b) Compute the product in the ring $(-3, 5)(2, -4)$ in $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{11}$.

(40 marks)

(c) How many homomorphisms are there of $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ into $\mathbb{Z}$?

(30 marks)

4. (a) Let R be a ring. Give a synopsis of the proof of the statement: If R has no divisors of 0 then the cancellation laws hold in R.

(30 marks)

(b) Let R be a ring that contains at least two elements. Suppose for each nonzero $a \in R$, there exists a unique $b \in R$ such that $aba = a$.

(i) Show that R has no divisors of 0.

(ii) Show that $bab = b$.

(iii) Show that R has unity.

(iv) Show that R is a division ring.

(40 marks)

(c) State whether the following statements are true of false.

(i) □ is a field of quotients of $\mathbb{Z}$.

(ii) □ is a field of quotients of $\mathbb{Z}$.

(iii) □ is a field of quotients of □.

(iv) □ is a field of quotients of □.

(v) If D is a field, then any field of quotients of D is isomorphic to D.

(vi) The fact that D has no divisors of 0 was used strongly several times in the construction of a field F of quotients of the integral domain D.

(vii) Every element of an integral domain D is a unit in a field of quotients of D.

(viii) A field of quotients F' of a subdomain D' of an integral domain D can be regarded as a subfield of some field of quotients D.

(ix) Every field of quotients of $\mathbb{Z}$ is isomorphic to □.

(30 marks)

5. (a) Let R be a nonzero commutative ring, and let T be a nonempty subset not containing 0 be closed under multiplication.

(i) Starting with $R \times T$, can we show that the ring R be enlarged to a partial ring of quotients $Q(R, T)$?

(ii) If $R = \mathbf{Z}_6$ and $T = \{1, 2, 4\}$, can we show that the ring R be enlarged to a partial ring of quotients $Q(R, T)$?

(40 marks)

(b) Let ϕ be a homomorphism of a ring R with unity onto a nonzero ring R'. Let u be a unit in R. Show that $\phi(u)$ is a unit in R'.

(30 marks)

(c) Give an example to show that a factor ring of an integral domain may be a field.

(30 marks)

1. (a) Cari semua koset bagi subkumpulan $\langle 2 \rangle$ bagi $\mathbf{Z}_{12}$.

(30 markah)

(b) Andaikan H sebagai suatu subkumpulan bagi suatu kumpulan G. Buktikan bahawa jika partisi G ke dalam koset-koset kiri H sama dengan partisi ke dalam koset-koset kanan bagi H, maka $g^{-1}hg \in H$ bagi semua $g \in H$ dan semua $h \in H$.

(40 markah)

(c) Cari indeks $\langle \mu_2 \rangle$ di dalam kumpulan D_4 berdasarkan jadual berikut.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

(30 markah)

2. (a) Andaikan G sebagai kumpulan sebarangan dan andaikan a sebagai suatu unsur sebarangan bagi G. Andaikan $\phi : \mathbf{Z} \to G$ ditakrifkan oleh $\phi(n) = a^n$. Tunjukkan bahawa ϕ adalah suatu homomorfisma. Huraikan imej dan inti ϕ.

(30 markah)

(b) Andaikan M_n sebagai kumpulan tambah bagi semua matriks $n \times n$ yang mempunyai unsur-unsur nyata, dan andaikan □ sebagai kumpulan tambah nombor-nombor nyata. Andaikan $\phi(A) = \mathrm{tr}(A)$ bagi $A \in M_n$, di mana surih $\mathrm{tr}(A)$ adalah hasil tambah unsur-unsur pepenjuru utama A, daripada sudut atas sebelah kiri hingga ke sudut bawah sebelah kanan. Adakah ϕ suatu homomorfisma?

(30 markah)

(c) (i) Diberikan H adalah suatu subkumpulan bagi kumpulan G dan pendaraban koset kanan ditakrifkan dengan jelas dengan persamaan $(aH)(bH) = (ab)H$. Tunjukkan bahawa $Ha \subseteq aH$.

(ii) Guna (i) untuk membuktikan bahawa H adalah suatu subkumpulan normal bagi G jika dan hanya jika pendaraban koset kiri tertakrif dengan jelas oleh persamaan $(aH)(bH) = (ab)H$.

(40 markah)

3. (a) Cari tertib kumpulan faktor $\mathbf{Z}_6/\langle 3\rangle$.

(30 markah)

(b) Hitung hasil darab di dalam gelang $(-3, 5)(2, -4)$ dalam $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_{11}$.

(40 markah)

(c) Berapakah homomorfisma yang ada pada $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ di dalam $\mathbf{Z}$?

(30 markah)

4. (a) Andaikan *R* sebagai suatu gelang. Berikan sinopsis bukti pernyataan: Jika *R* tidak mempunyai pembahagi-pembahagi buat 0 maka hukum-hukum pembatalan berkuat kuasa di dalam *R*.

(30 markah)

(b) Andaikan *R* sebagai suatu gelang yang mengandungi sekurang-kurangnya dua unsur. Andaikan bagi setiap $a \in R$ yang bukan sifar, wujud suatu $b \in R$ yang unik supaya $aba = a$.

(i) Tunjukkan bahawa *R* tidak mempunyai pembahagi-pembahagi bagi 0.

(ii) Tunjukkan bahawa $bab = b$.

(iii) Tunjukkan bahawa *R* mempunyai kesatuan.

(iv) Tunjukkan bahawa *R* adalah suatu gelang pembahagian.

(40 markah)

(c) Nyatakan sama ada pernyataan-pernyataan berikut adalah benar atau palsu.

(i) □ adalah medan hasil bahagi $\mathbf{Z}$.

(ii) □ adalah medan hasil bahagi $\mathbf{Z}$.

(iii) □ adalah medan hasil bahagi □ .

(iv) □ adalah medan hasil bahagi □ .

(v) Jika *D* ialah suatu medan, maka sebarang medan hasil bahagi untuk *D* adalah isomorfik kepada *D*.

(vi) Fakta bahawa *D* tidak mempunyai pembahagi-pembahagi untuk 0 digunakan dengan tegas beberapa kali di dalam pembinaan suatu medan hasil bahagi *F* bagi domain kamiran *D*.

(vii) Setiap unsur di dalam suatu domain kamiran D adalah suatu unit di dalam medan hasil bahagi bagi D.

(viii) Suatu medan hasil bahagi F' bagi subdomain D' bagi domain kamiran D boleh diambil kira sebagai submedan suatu medan hasil bahagi D.

(ix) Setiap medan hasil bahagi $\mathbf{Z}$ adalah isomorfik kepada □ .

(30 markah)

5. (a) Andaikan R sebagai suatu gelang kalis tukar tertib bukan sifar, dan andaikan T sebagai suatu subset tak kosong yang tidak mengandungi 0, tertutup di bawah pendaraban.

(i) Bermula dengan $R \times T$, bolehkah kita tunjuk bahawa gelang R boleh diperbesarkan menjadi suatu gelang hasil bahagi separa $Q(R, T)$?

(ii) Jika $R = \mathbf{Z}_6$ dan $T = \{1, 2, 4\}$, bolehkah kita tunjuk bahawa gelang R boleh diperluaskan menjadi suatu gelang hasil bahagi separa $Q(R, T)$?

(40 markah)

(b) Andaikan ϕ sebagai suatu homomorfisma bagi suatu gelang R dengan kesatuan ke atas suatu gelang tak sifar R'. Andaikan u sebagai suatu unit di dalam R. Tunjukkan bahawa $\phi(u)$ adalah suatu unit di dalam R'.

(30 markah)

(c) Berikan suatu contoh untuk menunjukkan bahawa suatu gelang faktor bagi domain kamiran boleh menjadi suatu medan.

(30 markah)

- oooOooo -