



UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2016/2017 Academic Session

May/June 2017

JIM 419 – Complex Variables
[Pembolehubah Kompleks]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **FIVE** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan.]*

*Jawab **SEMUA** soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Seciranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]

1. (a) Reduce $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1-i}\right)^3$ in the form of $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
(30 marks)
- (b) Use polar form to show that $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$.
(30 marks)
- (c) Find all values of $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}-2i}$.
(40 marks)
2. (a) Show that the derivative of $f(z) = e^{-z}$ exists. Then find its derivative.
(40 marks)
- (b) Show that $u = y^3 - 3x^2y$ is harmonic. Then find the harmonic conjugate $v(x, y)$.
(60 marks)
3. (a) Determine the poles of $f(z) = \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2 + 9)}$ and find its residues.
(50 marks)
- (b) By using part (a), evaluate $\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2 + 9)} dz$ if C is a circle
- (i) $|z-2| = 2$
 - (ii) $|z| = 4$
- (50 marks)

4. (a) Determine the region of convergence for the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^{n-1}}{(n+1)^3 5^n}$.
(40 marks)

(b) Find the Taylor series of the function $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ about the point $z = 0$.
(60 marks)

5. (a) Evaluate $\int_C \frac{1}{z-2} dz$, given C is a circle
(i) $|z|=1$.
(ii) $|z|=3$.
(50 marks)

(b) Use Cauchy integral formula to evaluate
(i) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+2)} dz$, given C is the circle $|z|=3$.
(ii) $\oint_C \frac{z}{(z+i)(9-z^2)} dz$, given C is the circle $|z|=2$.
(50 marks)

1. (a) Nyatakan $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1-i}\right)^3$ dalam bentuk $x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
(30 markah)
- (b) Guna bentuk berkutub untuk menunjukkan bahawa $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$.
(30 markah)
- (c) Cari semua nilai bagi $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}-2i}$.
(40 markah)
2. (a) Tunjukkan bahawa derivatif bagi $f(z) = e^{-z}$ wujud. Kemudian dapatkan derivatifnya.
(40 markah)
- (b) Tunjukkan bahawa $u = y^3 - 3x^2y$ adalah harmonik. Kemudian dapatkan harmonik konjugat $v(x, y)$.
(60 markah)
3. (a) Tentukan kutub bagi fungsi $f(z) = \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}$ dan tentukan rejanya.
(50 markah)
- (b) Dengan menggunakan bahagian (a), nilaikan $\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$ jika C ialah bulatan
(i) $|z-2|=2$
(ii) $|z|=4$
(50 markah)

4. (a) Tentukan rantau penumpuan bagi siri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^{n-1}}{(n+1)^3 5^n}$.

(40 markah)

- (b) Dapatkan siri Taylor bagi fungsi $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ di sekitar $z = 0$.

(60 markah)

5. (a) Nilaikan $\int_C \frac{1}{z-2} dz$, diberi C bulatan

(i) $|z| = 1$

(ii) $|z| = 3$.

(50 markah)

- (b) Gunakan rumus kamiran Cauchy untuk menilai

(i) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+2)} dz$, diberi C adalah $|z| = 3$.

(ii) $\oint_C \frac{z}{(z+i)(9-z^2)} dz$, diberi C adalah $|z| = 2$.

(50 markah)