UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2016/2017 Academic Session

May/June 2017

JIM 315 – Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[*Masa: 3 jam*]

Please ensure that this examination paper contains **SEVEN** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*

*Jawab **SEMUA** soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.
Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.

1. (a) If p is a prime number, prove that $\sqrt{p}$ is not a rational number.

(40 marks)

(b) Suppose that x_n and y_n are Cauchy sequences in $\mathbf{R}$, prove that the product of these two Cauchy sequences is Cauchy.

(30 marks)

(c) Find the limit infimum and the limit supremum of the sequence $x_n = 2-(-1)^n$.

(30 marks)

2. (a) Use the formal definition of the limit of a function to prove the following limit exists.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3.$$

(30 marks)

(b) Let $f(x)=\cos x$ and $n\in\mathbf{N}$.

(i) Show that the Taylor polynomial is $P_{2n} := P_{2n}^{f,0} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

(ii) Prove that if $x\in[-1,1]$ then

$$\left|\cos x - P_{2n}(x)\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}.$$

(iii) Find an n so large that P_{2n} approximates $\cos x$ on $[-1,1]$ to four decimal places.

(70 marks)

3. (a) Suppose that $a,b\in\mathbf{R}$ with $a<b$. Let f be a continuous function on $[a,b]$ that is differentiable on (a,b). Use the Mean Value theorem to prove that if $f'(x)<0$ for all $x\in(a,b)$, then f is decreasing on $[a,b]$.

(30 marks)

(b) A partition is given by

$$P_n := \left\{\frac{j}{n} : j=0,1,\ \cdots,\ n\right\}.$$

(i) Prove that for each $n\in\mathbf{N}$, P_n is a partition of $[0,1]$.

(ii) Find formulas for the upper and lower Riemann sums of $f(x)=x$ on P_n.

(iii) Use the definition and results in (ii) to show that

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}.$$

(70 marks)

4. (a) Suppose that f is integrable on $[0.5,1]$ and that

$$\int_{0.5}^{1} x^k f(x)\ dx = 3+k^2 \text{, for } k = 0, 1, 2.$$

Compute the integral

$$\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} f\left(\sqrt{1-x^2}\right)\ dx.$$

(30 marks)

(b) Suppose that f and g are convex on an interval I. Prove that $f+g$ is convex on I.

(30 marks)

(c) Let $\{a_k\}$ be real sequences. Use root test to prove that if $a_k > 0$ and $a_k^{1/k} \to a$ as $k \to \infty$, then $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ converges for all $|x| < 1/a$ where $a \neq 0$.

(40 marks)

5. (a) Prove that $\dfrac{1}{nx} \to 0$ pointwise but not uniformly on $(0,1)$ as $n \to \infty$.

(30 marks)

(b) Prove by Weierstrass M-test that $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{x}{k^2}\right)$ converges uniformly on any bounded interval in $\mathbf{R}$.

(30 marks)

(c) Prove that e^x is analytic on $\mathbf{R}$ and has Maclaurin expansion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(40 marks)

1. (a) Jika p ialah nombor perdana, buktikan $\sqrt{p}$ bukan nombor nisbah.

(40 markah)

(b) Andaikan x_n dan y_n merupakan jujukan Cauchy pada **R**, buktikan bahawa hasil darab kedua-dua jujukan Cauchy tersebut adalah Cauchy.

(30 markah)

(c) Cari had infimum dan had supremum bagi jujukan $x_n = 2-(-1)^n$.

(30 markah)

2. (a) Guna definisi formal bagi had suatu fungsi untuk membuktikan had fungsi berikut wujud.

$$\operatorname*{had}_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3.$$

(30 markah)

(b) Diberi $f(x)=\cos x$ dan $n\in\mathbf{N}$.

(i) Tunjukkan bahawa polinominal Taylor ialah

$$P_{2n} := P_{2n}^{f,0} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

(ii) Buktikan bahawa jika $x\in[-1,1]$ maka

$$\left|\cos x - P_{2n}(x)\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}.$$

(iii) Cari suatu n yang cukup besar supaya P_{2n} menganggar $\cos x$ pada $[-1,1]$ sehingga empat tempat perpuluhan.

(70 markah)

3. (a) Andaikan bahawa $a, b \in \mathbf{R}$ dengan $a < b$. Katakan f suatu fungsi selanjar pada $[a,b]$ dan terbezakan pada (a,b). Guna teorem Nilai Min untuk buktikan bahawa jika $f'(x) < 0$ bagi setiap $x \in (a,b)$, maka f adalah menyusut pada $[a,b]$.

(30 markah)

(b) Diberi suatu petak

$$P_n := \left\{ \frac{j}{n} : j = 0, 1, \cdots, n \right\}.$$

(i) Buktikan bahawa P_n merupakan petak pada $[0,1]$ bagi setiap $n \in \mathbf{N}$.

(ii) Cari rumus untuk hasil tambah Riemann atas dan hasil tambah Riemann bawah bagi $f(x) = x$ pada P_n.

(iii) Gunakan definisi dan keputusan dari (ii) untuk tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 x \; dx = \frac{1}{2}.$$

(70 markah)

4. (a) Andaikan f adalah terbezakan pada $[0.5,1]$ dan

$$\int_{0.5}^{1} x^k f(x) \; dx = 3 + k^2, \text{ untuk } k = 0, 1, 2.$$

Kirakan kamiran

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} f\left(\sqrt{1-x^2}\right) \; dx.$$

(30 markah)

(b) Andaikan f dan g adalah cembung pada suatu selang I. Buktikan bahawa $f + g$ adalah cembung pada I.

(30 markah)

(c) Diberi $\{a_k\}$ merupakan jujukan nyata. Gunakan ujian nisbah untuk membuktikan bahawa jika $a_k > 0$ dan $a_k^{1/k} \to a$ apabila $k \to \infty$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ menumpu bagi semua $|x| < 1/a$ di mana $a \neq 0$.

(40 markah)

5. (a) Buktikan bahawa $\frac{1}{nx} \to 0$ ialah titik demi titik tetapi tidak seragam pada $(0,1)$ apabila $n \to \infty$.

(30 markah)

(b) Buktikan $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$ adalah menumpu secara seragam pada sebarang selang tertutup pada $\mathbf{R}$ dengan menggunakan ujian Weierstrass M.

(30 markah)

(c) Buktikan e^x adalah analitik pada $\mathbf{R}$ dan mempunyai pengembangan Maclaurin

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(40 markah)

Appendix

The Taylor's Formula

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

The Taylor polynomial of order n generated by f centred at x_0

$$P_n^{f,\,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

The power series (centred at x_0)

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

The Binomial Series

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

The formula for sum of sequences for all $n \in \mathbf{N}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Upper Riemann sum

$$U(f,P) := \sum_{j=1}^{n} M_j(f)\, \Delta x_j$$

where $M_j(f) := \sup f([x_{j-1}, x_j])$ and $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$

Lower Riemann sum

$$L(f,P) := \sum_{j=1}^{n} m_j(f)\, \Delta x_j$$

where $m_j(f) := \inf\, f([x_{j-1}, x_j])$ and $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$

- oooOooo -