UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2016/2017 Academic Session

May/June 2017

JIM 213 – Differential Equations I
[Persamaan Pembezaan I]

Duration : 3 hours
[*Masa: 3 jam*]

Please ensure that this examination paper contains **TWELVE** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **DUA BELAS** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*

*Jawab **SEMUA** soalan.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.

1. (a) (i) State the existence and uniqueness theorem for the initial value problem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y_0$$

(ii) Consider the initial value problem

$$(y^2 - 4)\frac{dy}{dt} = \cos t,$$
$$y(0) = 2$$

Determine whether the existence and uniqueness theorem implies that the given initial value problem has a unique solution. Give reasons that support your conclusion.

(30 marks)

(b) Find an implicit general solution of the equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{(y^2+1)(x^2+4)}$$

(30 marks)

(c) Find the general solution for the nonlinear Bernoulli equation

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0, \quad x > 0$$

(40 marks)

2. (a) Show that

$$1 + y^3 + y\cos(xy) + \left(3y^2 x + x\cos(xy)\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

is *exact* differential equation. Hence find an implicit solution to the equation.

(40 marks)

(b) The motion of the unforced mass-spring system with mass 2 kg and spring constant 6 N is governed by the second order linear homogeneous differential equation

$$2y'' + \gamma y' + 6y = 0.$$

(i) Derive the inequality that the friction coefficient γ must satisfy in order for the system to be overdamped.

(ii) Let γ satisfy the inequality in part (i). Given the initial condition $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$, sketch the solution.

(iii) Determine whether or not the mass ever moves below the equilibrium point.

(60 marks)

3. (a) Use the method of undetermined coefficients to find the particular solution to the non homogeneous differential equation

$$y'' - 2y' - 3y = 3te^{-t}.$$

Your answer should be a function with no undetermined constants in it.

(40 marks)

(b) Solve the Euler differential equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

Hence, by using the method of variation of parameters find the general solution of the second order differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x^3}$$

State an interval on which the general solution is defined.

(60 marks)

4. Given a system of homogenous linear differential equations

$$\frac{dx}{dt}+2x-2y-2z=0$$
$$\frac{dy}{dt}-2x+5y-z=0$$
$$\frac{dz}{dt}-2x-y+5z=0$$

(a) Write the system of equations in the form

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

where $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ and identify the matrix A.

(15 marks)

(b) Show that

$$V_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is an eigenvector of the matrix A found in (a). State the corresponding eigenvalue.

(35 marks)

(c) Show also that

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

is an eigenvector for arbitrary values of constants α and β. State the coresponding eigenvalues.

(30 marks)

(d) Hence write down the general solution of the system as given in (a).

(20 marks)

5. (a) The unit Heaviside function is defined by

$$U(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

By using the definition of Laplace transform, prove that

$$L\{U(t-c)\,f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$$

where

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

(15 marks)

(b) Write the piecewise function $f(t)$ defined by

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ e^{2t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

in term of Heaviside function $U(t-c)$. Hence obtain the Laplace transform of $f(t)$.

(15 marks)

(c) Using the results in (a) and the Table 1, find the

(i) Laplace transform of $U(t-2)e^{2(t-2)}$,

(ii) inverse Laplace transform of $e^{-2s}\dfrac{1}{s+2}$.

(20 marks)

(d) Write in partial fraction

$$\frac{6}{s(s+2)(s-1)}.$$

Hence find its inverse Laplace transform.

(20 marks)

(e) Using the method of Laplace transform with any results from (a) – (d), find the solution of the initial value problem

$$y'' + y' - 2y = 6\,U(t-2)$$
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

where $U(t-2)$ is a unit Heaviside function.

[You may use the results given in Table 1].

(30 marks)

1. (a) (i) Nyatakan teorem kewujudan dan keunikan untuk masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y_0$$

(ii) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$(y^2 - 4)\frac{dy}{dt} = \cos t,$$
$$y(0) = 2$$

Tentukan sama ada teorem kewujudan dan keunikan mengimplikasikan masalah nilai awal ini mempunyai penyelesaian unik. Beri alasan untuk menyokong kesimpulan anda.

(30 markah)

(b) Cari penyelesaian tak tersirat bagi persamaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{(y^2+1)(x^2+4)}$$

(30 markah)

(c) Cari penyelesaian am bagi persamaan Bernoulli yang tak linear

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0, \quad x > 0$$

(40 markah)

2. (a) Tunjukkan bahawa

$$1 + y^3 + y\cos(xy) + \left(3y^2x + x\cos(xy)\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

adalah persamaan pembezaan tepat. Dengan itu, cari penyelesaian tersirat bagi persamaan tersebut.

(40 markah)

(b) Pergerakan suatu sistem jisim-spring tak paksa dengan jisim 2 kg dan pemalar spring 6 N diwakili oleh persamaan pembezaan homogen linear berperingkat kedua

$$2y'' + \gamma y' + 6y = 0\,.$$

(i) Terbitkan suatu ketaksamaan untuk koefisien geseran γ yang mesti ditepati supaya sistem berkenaan berkeadaan terendam lebih.

(ii) Katakan γ menepati ketaksamaan dalam bahagian (i). Diberi syarat awal $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$, lakarkan penyelesaian tersebut.

(iii) Tentukan sama ada jisim berkenaan tidak pernah bergerak di bawah titik keseimbangan.

(60 markah)

3. (a) Gunakan kaedah koefisien belum tentu untuk mencari penyelesaian khusus bagi persamaan pembezaan tak homogen

$$y'' - 2y' - 3y = 3te^{-t}\,.$$

Jawapan anda mesti suatu fungsi yang tidak mengandungi pemalar yang belum ditentukan.

(40 markah)

(b) Selesaikan persamaan pembezaan Euler

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0\,.$$

Dengan itu, guna kaedah perubahan parameter untuk mencari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan peringkat kedua

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x^3}$$

Nyatakan selang di mana penyelesaian am tersebut tertakrif.

(60 markah)

4. Diberi sistem persamaan pembezaan linear yang homogen

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 2y - 2z = 0$$
$$\frac{dy}{dt} - 2x + 5y - z = 0$$
$$\frac{dz}{dt} - 2x - y + 5z = 0$$

(a) Tuliskan sistem persamaan berkenaan dalam bentuk

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

di mana $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dan kenalpasti matriks A.

(15 markah)

(b) Tunjukkan bahawa

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

adalah vektor eigen bagi matriks A yang diperolehi dalam (a). Nyatakan nilai eigen yang bersepadan.

(35 markah)

(c) Tunjukkan juga bahawa

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

adalah vektor eigen dengan α dan β adalah pemalar dengan nilai sebarangan. Nyatakan nilai eigen yang bersepadan.

(30 markah)

(d) Dengan yang demikian, tuliskan penyelesaian am bagi sistem yang diberi dalam (a).

(20 markah)

5. (a) Fungsi unit Heaviside ditakrifkan oleh

$$U(t-c)=\begin{cases}0, & t<c,\\ 1, & t\geq c\end{cases}$$

Dengan menggunakan jelmaan Laplace, buktikan

$$L\{U(t-c)\,f(t-c)\}=e^{-cs}F(s)$$

di mana

$$L\{f(t)\}=F(s)$$

(15 markah)

(b) Tuliskan fungsi $f(t)$ yang ditakrifkan cebis demi cebis oleh

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<2\\ e^{2t}, & t\geq 2\end{cases}$$

dalam sebutan fungsi Heaviside $U(t-c)$. Dengan itu, dapatkan jelmaan Laplace bagi $f(t)$.

(15 markah)

(c) Dengan menggunakan keputusan dalam (a) dan Jadual 1, cari

(i) jelmaan Laplace bagi $U(t-2)e^{2(t-2)}$,

(ii) jelmaan Laplace songsang bagi $e^{-2s}\dfrac{1}{s+2}$.

(20 markah)

(d) Tuliskan dalam pecahan separa

$$\frac{6}{s(s+2)(s-1)}.$$

Dengan itu, cari Jelmaan Laplace songsangnya.

(20 markah)

(e) Dengan menggunakan kaedah jelmaan Laplace bersama mana-mana keputusan (a) – (d), cari penyelesaian masalah nilai awal

$$y'' + y' - 2y = 6\,U(t-2)$$
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

di mana $U\left(t-2\right)$ adalah fungsi unit Heaviside.

[Anda boleh guna sebarang keputusan yang diberi dalam Jadual 1].

(30 markah)

Table 1/Jadual 1
Elementary Laplace Transforms

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n, \quad n =$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}, \quad n =$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$
14. $e^{ct} f(t)$	$f(s-c)$
15. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
16. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

- oooOooo -