UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2015/2016 Academic Session

May/June 2016

JIM 421 – Modern Algebra
[Aljabar moden]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **FIVE** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*

*Jawab **SEMUA** soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]

1. (a) If $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a two elements of S_3, calculate $\pi \circ \rho$ and $\rho \circ \pi$.

(25 marks)

(b) Find the order of the permutation,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(25 marks)

(c) H itself is one coset. Another is $Hg = \{g, g^5, g^9\}$. These two cosets have not exhausted all the elements of C_{12}, so pick an element, say g^2, which is not in H or Hg. A third coset is $Hg^2 = \{g^2, g^6, g^{10}\}$ and a fourth is $Hg^3 = \{g^3, g^7, g^{11}\}$. Since $C_{12} = H \cup Hg \cup Hg^2 \cup Hg^3$, find the right cosets of $H = \{e, g^4, g^8\}$ in C_{12}.

(25 marks)

(d) Let $\phi : z \to z$ be given by $\phi(n) = 7n$. Prove that ϕ is a group homomorphism. Find the kernel and the image of ϕ.

(25 marks)

2. (a) If G is cyclic, prove that G/H must also be cyclic.

(25 marks)

(b) The centraliser of an element g is a group G to be the set

$$C(g) = \{x \in G; xg = gx\}.$$

Show that $C(g)$ is a subgroup of G. If g generates a normal subgroup of G, prove that $C(g)$ is normal in G.

(25 marks)

(c) List and characterise all of the units in each of the following rings.

(i) $\mathbb{Z}_{10}$

(ii) $\mathbb{Z}_{7}$

(iii) $M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)$, the 2×2 matrices with entries in $\left(\mathbb{Z}_2\right)$.

(25 marks)

(d) Find all of the ideals in each of the following rings. Which of these ideals are maximal and which are prime?

(i) $\mathbb{Z}_{18}$

(ii) $m_2\left(\mathbb{R}\right)$, the 2×2 matrices with entries in $\mathbb{R}$.

(25 marks)

3. (a) Prove or give counter example: the ring $Q\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2};a,b\in Q\right\}$ is isomorphic to the ring $Q\left(\sqrt{3}\right)=\left\{a+b\sqrt{3};a,b\in Q\right\}$.

(25 marks)

(b) Let $\mathbb{R}$ be a ring, where $a^3 = a$ for all $a\in \mathbb{R}$. Prove that $\mathbb{R}$ must be a commutative ring.

(25 marks)

(c) Compute

(i) $\left(5x^2+3x-4\right)+\left(4x^2-x+9\right)$ in $\mathbb{Z}_{12}$

(ii) $\left(7x^3+3x^2-x\right)+\left(6x^2-8x+4\right)$ in $\mathbb{Z}_9$

(25 marks)

(d) Let $f(x)$ be irreducible. If $f\left(x\right)\middle|p\left(x\right)q\left(x\right)$, prove that either $f\left(x\right)\middle|p\left(x\right)$ or $f\left(x\right)\middle|q\left(x\right)$.

(25 marks)

4. (a) Show that $Q\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in Q\right\}$ is a subring of $\mathbb{R}$.

(25 marks)

(b) If X is a one element set, show that $f:p\left(x\right)\rightarrow\mathbb{Z}_2$ is a ring isomorphism between $\left(P\left(x\right),\Delta,\cap\right)$ and $\left(Z_2,+,\cdot\right)$, where $f\left(\phi\right)=\left[0\right]$ and $f\left(x\right)=\left[1\right]$.

(25 marks)

(c) Show that $f:\mathbb{Z}_{24}\rightarrow\mathbb{Z}_4$, defined by $f\left(\left[x\right]_{24}\right)=\left[x\right]_4$ is a ring morphism.

(25 marks)

(d) Is $\left(Q\left(\sqrt{2}\right),+,\cdot\right)$ an integral domain on a field?

(25 marks)

1. (a) Jika $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah dua elemen daripada S_3, hitung $\pi \circ \rho$ dan $\rho \circ \pi$.

(25 markah)

(b) Cari tertib pilih atur.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(25 markah)

(c) H adalah koset. Satu lagi adalah $Hg = \{g, g^5, g^9\}$. Kedua-dua koset belum kehabisan kesemua elemen daripada C_{12}, pilih elemen g^2, yang bukan dalam H atau Hg. Koset ketiga adalah $Hg^2 = \{g^2, g^6, g^{10}\}$ dan keempat adalah $Hg^3 = \{g^3, g^7, g^{11}\}$. Oleh kerana $C_{12} = H \cup Hg \cup Hg^2 \cup Hg^3$, semua ini adalah koset, cari koset yang tepat bagi $H = \{e, g^4, g^8\}$ dalam C_{12}.

(25 markah)

(d) Biar $\phi : z \to z$ diberikan oleh $\phi(n) = 7n$. Buktikan bahawa ϕ adalah kumpulan homomorfisma. Cari inti dan imej daripada ϕ.

(25 markah)

2. (a) Jika G adalah kitaran, buktikan bahawa G/H juga adalah kitaran.

(25 markah)

(b) Pemusat daripada elemen g dalam kumpulan G menjadi set:

$$C(g) = \{x \in G; xg = gx\}.$$

Tunjukkan bahawa $C(g)$ adalah subkumpulan daripada G. Jika g menjana subkumpulan normal daripada G, buktikan bahawa $C(g)$ adalah normal dalam G.

(25 markah)

(c) Senaraikan dan cirikan semua unit dalam setiap gelang berikut:

(i) $\mathbb{Z}_{10}$

(ii) $\mathbb{Z}_7$

(iii) $M_2(\mathbb{Z}_2)$, matriks 2×2 dengan pemasukan dalam $(\mathbb{Z}_2)$.

(25 markah)

(d) Tentukan semua ideal dalam setiap gelang berikut. Yang mana ideal ini adalah maksimum dan ideal mana yang perdana?

(i) $\mathbb{Z}_{18}$

(ii) $m_2(\mathbb{R})$, matriks 2×2 dengan pemasukan dalam $\mathbb{R}$.

(25 markah)

3. (a) Buktikan atau berikan contoh lawan: Gelang $Q\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2};a,b\in Q\right\}$ adalah isomorphisma kepada gelang $Q\left(\sqrt{3}\right)=\left\{a+b\sqrt{3};a,b\in Q\right\}$.

(25 markah)

(b) Biar $I\!R$ adalah gelang, di mana $a^3 = a$ untuk semua $a\in I\!R$. Buktikan bahawa $I\!R$ adalah gelang kalis tukar tertib.

(25 markah)

(c) Hitung:

(i) $\left(5x^2+3x-4\right)+\left(4x^2-x+9\right)$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$

(ii) $\left(7x^3+3x^2-x\right)+\left(6x^2-8x+4\right)$ dalam $\mathbb{Z}_{9}$

(25 markah)

(d) Biar $f(x)$ adalah tak terturunkan. Jika $f(x)\,|\,p(x)q(x)$, buktikan sama ada $f(x)\,|\,p(x)$ atau $f(x)\,|\,q(x)$.

(25 markah)

4. (a) Tunjukkan bahawa $Q\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in Q\right\}$ adalah subgelang daripada $I\!R$.

(25 markah)

(b) Jika X adalah satu set elemen, tunjukkan bahawa $f:p(x)\to z_2$ adalah gelang isomorfisma antara $\left(P(x),\Delta,\cap\right)$ dan $\left(Z_2,+,\cdot\right)$, di mana $f(\phi)=[0]$ dan $f(x)=[1]$.

(25 markah)

(c) Tunjukkan bahawa $f:\mathbb{Z}_{24}\to\mathbb{Z}_{4}$, ditakrifkan oleh $f\left([x]_{24}\right)=[x]_4$ adalah gelang morfisma.

(25 markah)

(d) Adakah $\left(Q\left(\sqrt{2}\right),+,\cdot\right)$ adalah kamiran domain atau medan?

(25 markah)

- oooOooo -