UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2015/2016 Academic Session

May/June 2016

JIM 419 – Complex Variables
[Pembolehubah Kompleks]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **FIVE** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan.*

*Jawab **SEMUA** soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]

1. (a) Evaluate $\int_C \frac{1}{z-3}\, dz$, given C is a circle

   (i) $|z| = 2$

   (ii) $|z| = 4$.

(40 marks)

(b) Using Cauchy-Riemann equations, determine whether $f'(z)$ exists. If it exists find its value.

   (i) $f(z) = e^y e^{ix}$

   (ii) $f(z) = xy + iy$

(60 marks)

2. (a) Show that $u = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ is harmonic. Then find v so that $f(z) = u + iv$ is an analytic function.

(50 marks)

(b) Use Cauchy integral formula to evaluate

   (i) $\oint_C \frac{\cos z\pi + \sin z\pi}{z^2 - 3z + 2}\, dz$, given C is the circle $|z| = 3$.

   (ii) $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$, given C is the circle $|z - 2i| = 2$.

(50 marks)

3. (a) Find the Taylor series of the function $f(z) = \ln z$ about the point $z = 1$. Then find its radius of convergence.

(50 marks)

(b) Find the Maclaurin series expansion of the function $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$.

(50 marks)

4. (a) Use Cauchy's residue theorem to find the value of the integral

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z+4)}\,dz, \quad \text{if } C \text{ is a circle}$$

(i) $|z| = 2$

(ii) $|z+2| = 3$.

(60 marks)

(b) Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-4\cos\theta+1}\,d\theta$.

(40 marks)

5. (a) Expand $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ in a Laurent series valid for $2 < |z| < 3$.

(40 marks)

(b) Find the residues of $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ at all its poles.

(30 marks)

(c) Determine the region of convergence for the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$.

(30 marks)

1. (a) Nilaikan $\int_C \frac{1}{z-3}\,dz$, diberi C adalah bulatan

(i) $|z| = 2$

(ii) $|z| = 4$.

(40 markah)

(b) Dengan menggunakan persamaan Cauchy-Riemann, tentukan sama ada $f'(z)$ wujud. Jika wujud cari nilainya.

(i) $f(z) = e^y e^{ix}$

(ii) $f(z) = xy + iy$

(60 markah)

2. (a) Tunjukkan bahawa $u = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ adalah harmonik. Kemudian cari v supaya $f(z) = u + iv$ adalah fungsi analitik.

(50 markah)

(b) Gunakan rumus kamiran Cauchy untuk menilai

(i) $\oint_C \frac{\cos z\pi + \sin z\pi}{z^2 - 3z + 2}\,dz,$ diberi C adalah $|z| = 3.$

(ii) $\oint_C \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\,dz,$ diberi C adalah $|z - 2i| = 2.$

(50 markah)

3. (a) Dapatkan siri Taylor bagi fungsi $f(z) = \ln z$ di sekitar $z = 1$. Kemudian dapatkan jejari penumpuannya.

(50 markah)

(b) Dapatkan pengembangan siri Maclaurin bagi fungsi $f(z) = \frac{z}{z^4 + 9}$.

(50 markah)

4. (a) Gunakan teorem reja Cauchy untuk mendapatkan nilai kamiran

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z+4)}\,dz\,, \quad \text{jika } C \text{ adalah bulatan}$$

(i) $|z| = 2$

(ii) $|z+2| = 3$.

(60 markah)

(b) Nilaikan $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-4\cos\theta+1}\,d\theta$.

(40 markah)

5. (a) Kembangkan $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ sebagai siri Laurent yang sah untuk $2 < |z| < 3$.

(40 markah)

(b) Cari reja bagi $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ di kutub-kutubnya.

(30 markah)

(c) Tentukan rantau penumpuan bagi siri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$.

(30 markah)

-oooOooo-