UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIF 315 – Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 20 markah.

...2/..

1. Satu set permukaan dalam tiga dimensi diberi oleh ungkapan

$$w = (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2$$

(a) Tunjukkan bahawa titik (1,1,1) berada pada permukaan yang diberi oleh ungkapan

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$$

(3markah)

(b) Tunjukkan bahawa kecerunan (gradient) pada titik (1,1,1) diberi oleh ungkapan

$$\vec{N} = -2\hat{i} + 2\hat{k}$$

(5 markah)

(c) Tunjukkan bahawa garis normal pada permukaan tangen pada titik (1,1,1) diberi oleh ungkapan

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (1+t)\hat{k}$$

di mana t adalah parameter sembarangan. (5 markah)

(d) Dapatkan persamaan permukaan tangen pada titik (1,1,1).

(7 markah)

2. Pertimbangkan medan keupayaan skalar V yang diberi oleh ungkapan

$$V = 5\exp\left(-\frac{1}{2}\left\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right\}\right)$$

(Berikan jawapan di dalam sebutan eksponential)

(a) Dapatkan nilai V pada titik asalan. (2 markah)

(b) Dapatkan medan $\vec{E} = \vec{\nabla}V$ pada titik asalan. (6 markah)

(c) Dapatkan $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ pada titik yang sama. (6 markah)

(d) Dapatkan $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ pada sebarang titik. (6 markah)

...3/..

3. (a) Katakan satu daya yang diberi oleh ungkapan berikut

$$\vec{F} = (x-1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

telah bertindak keatas satu zarah dan telah menggerakkan zarah tersebut melalui lintasan berikut, dari (0,0,0)→(1,0,0)→(1,1,0)→(1,1,1). Dapatkan jumlah kerja yang dilakukan untuk menggerakkan zarah mengikut lintasan begini.

(10 markah)

b) Pertimbangkan satu zarah yang berada pada titik $\vec{r}$ pada masa t seperti berikut

$$\vec{r} = 5\ \sin(2\pi t)\hat{i} + 5\ \text{kos}(2\pi t)\hat{j} + 5t\hat{k}$$

(i) Dapatkan halaju $\vec{v}$ untuk zarah ini bila masa $t = 1$ saat.

(3 markah)

(ii) Dapatkan pecutan $\vec{a}$ pada masa yang sama.

(3 markah)

(iii) Dapatkan jauh jarak yang di alami oleh zarah ini dari masa $t = 0$ ke $t = 1$.

(4 markah)

4. (a) Fungsi Gamma $\Gamma(n)$, ditakrifkan seperti berikut

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

Tunjukkan bahawa

$$\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Gunakan hubungan:

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(10 markah)

…4/..

(b) (i) Fungsi Beta B(m,n), di takrifkan seperti berikut

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Buat gantian $x = \text{kos}^2\theta$, tunjukkan bahawa

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{kos}^{2m-1}\theta\ \sin^{2n-1}\theta\ d\theta$$

(5 markah)

(ii) Dari itu tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{kos}^3\theta\ \sin\theta\ d\theta = \frac{1}{4}$$

Boleh gunakan hubungan berikut

$$\left[\begin{array}{l}\text{Boleh gunakan hubungan berikut}\\ B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\end{array}\right]$$

(5 markah)

5. (a) Kebanyakan fungsi-fungsi khas di dalam fizik adalah penyelesaian kepada persamaan perbezaan peringkat kedua, dan mempunyai pertalian jadi semula. Pertalian jadi semula untuk polinomial Hermite, $H_n(x)$ adalah seperti berikut

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Dan diketahui bahawa

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$

Maka tunjukkan bahawa

$$H_2(x) = 2(2x^2 - 1)$$
$$H_3(x) = 2(4x^3 - 6x)$$

(10 markah)

...5/..

(b) Salah satu dari kegunaan fungsi-fungsi khas adalah untuk mewakili fungsi-fungsi tertentu di dalam bentuk polinomial. Dengan kata lain, satu polinomial f(x) dari darjah m, boleh diwakilkan oleh polinomial Legendre, $H_n(x)$, seperti berikut

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n H_n(x)$$

di mana a_n adalah pekali dan ia diberi oleh unggapan

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$$

Dari itu dapatkan x^2 dalam sebutan polinomial Hermite iaitu

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{n=0}^{2} a_n H_n(x) \\ &= a_0 H_o(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \end{aligned}$$

Gunakan sebutan Legendre seperti yang terdapat dalam soalan di atas untuk perkamiran.

(10 markah)

- oooOooo -