UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
2015/2016 Academic Session

May/June 2016

JIM 315 – Introduction To Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[*Masa: 3 jam*]

Please ensure that this examination paper contains **FIVE** printed pages before you begin the examination.

Answer **ALL** questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ***LIMA*** *muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.*

Jawab ***SEMUA*** *soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.
Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]

1. (a) Suppose that $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \epsilon$ and $|y-b| < \epsilon$ for some $\epsilon > 0$.

Prove that $|xy - ab| < (|a| + |b|)\epsilon + \epsilon^2$.

(40 marks)

(b) Suppose $E = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Find infimum and supremum of E if exist.

(30 marks)

(c) Prove that the set of odd integers is countable.

(30 marks)

2. (a) Show that the limit of a sequence if exist, is unique.

(30 marks)

(b) Prove that the sum of two Cauchy sequences is Cauchy.

(30 marks)

(c) Prove that $x_n = \frac{(n^2 + 20n + 35)\sin n^3}{n^2 + n + 1}$ has a convergent subsequence.

(40 marks)

3. (a) Let $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{when } x \neq 0 \\ 0 & \text{when } x = 0. \end{cases}$

Prove that f is continuous on $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ but discontinuous at 0.

(40 marks)

(b) Prove that $f(x) = x^2 - x$ is uniformly continuous on (0,1).

(30 marks)

(c) Prove that if f is differentiable at a, then f is continuous at a.

(30 marks)

4. (a) If $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, prove that $f^{-1}(x)$ exists at $x = 6$ and find $\left(f^{-1}\right)'(6)$.

(30 marks)

(b) Show that the Dirichlet function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{when} \quad x \in Q \\ 0 & \text{when} \quad x \notin Q \end{cases}$$

is not Riemann integrable on $[0,1]$.

(40 marks)

(c) Suppose $a < b < c$. If f is continuous on $[a,b)$ and on $[b,c]$, then f is Riemann integrable on $[a,c]$. Prove the above statement if it is true or give a counterexample if it is false.

(30 marks)

5. (a) Represent $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ as a telescopic series and find its value.

(40 marks)

(b) Prove that $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-3}{k^3+k+1}$ converges.

(30 marks)

(c) Prove that $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converges uniformly on □ .

(30 marks)

1. (a) Katakan $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \in$ dan $|y-b| < \in$ untuk $\in > 0$. Buktikan bahawa $|xy - ab| < (|a| + |b|) \in + \in^2$.

(40 markah)

(b) Katakan $E = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Cari infimum dan supremum bagi E jika wujud.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa set nombor-nombor integer ganjil adalah terbilangkan.

(30 markah)

2. (a) Tunjukkan bahawa had jujukan jika wujud, adalah unik.

(30 markah)

(b) Buktikan bahawa hasil tambah dua jujukan Cauchy adalah Cauchy.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa $x_n = \dfrac{(n^2 + 20n + 35)\sin n^3}{n^2 + n + 1}$ mempunyai satu subjujukan yang menumpu.

(40 markah)

3. (a) Katakan $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{jika} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{jika} \quad x = 0 \end{cases}$.

Buktikan bahawa f selanjar pada $(-\infty, 0)$ dan $(0, \infty)$ tetapi tidak selanjar pada 0.

(40 markah)

(b) Buktikan bahawa $f(x) = x^2 - x$ adalah selanjar secara seragam pada (0,1).

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa jika f terbezakan pada *a*, maka f selanjar pada *a*.

(30 markah)

4. (a) Jika $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, buktikan bahawa $f^{-1}(x)$ wujud pada $x = 6$ dan cari $\left(f^{-1}\right)'(6)$.

(30 markah)

(b) Tunjukkan bahawa fungsi Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{when} \quad x \in Q \\ 0 & \text{when} \quad x \notin Q \end{cases}$$

tidak terkamir secara Riemann pada $[0,1]$.

(40 markah)

(c) Katakan $a < b < c$. Jika f selanjar pada $[a,b)$ dan pada $[b,c]$, maka f terkamir secara Riemann pada $[a,c]$. Buktikan pernyataan di atas jika ia benar atau berikan suatu contoh lawan jika ia palsu.

(30 markah)

5. (a) Wakilkan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ sebagai satu siri teleskopik dan cari nilainya.

(40 markah)

(b) Buktikan bahawa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-3}{k^3+k+1}$ menumpu.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ menumpu secara seragam pada □ .

(30 markah)

- oooOooo -