

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MSS 211 - Aljabar Moden

Masa: [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam LAPAN halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab TIGA soalan sahaja. Soalan I dan Soalan II adalah wajib.

- I. Bagi setiap subsoalan berikut, pilih jawapan yang paling sesuai dan tandakannya dengan (✓) dalam kertas jawapan yang disediakan. Pilih X jika jawapan-jawapan lain yang disediakan tidak sesuai.

(100/100)

1.  $A$  dan  $B$  adalah set. Maka
  - (a)  $(A \cup B) \times (A \cup B) \subset (A \times B) \cup (B \times A)$
  - (b)  $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$
  - (c)  $\overline{B - A} = \overline{B} \cap \overline{A}$
  - (d)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - (e) X
2.  $M = \{(x, y) \in Z \times Z \mid x \equiv 4 \pmod{6}, y \equiv 2 \pmod{5}, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$ . Maka  $|M| = ?$ 
  - (a) 1
  - (b) 2
  - (c) 3
  - (d) 4
  - (e) 5
3.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .  $H = \{(i, j) \in A \times A \mid i = j \text{ atau } i < j \text{ atau } i - j = 1\}$ . Maka  $H$  adalah
  - (a) refleksif dan simetri
  - (b) refleksif dan transitif
  - (c) simetri dan transitif
  - (d) setara
  - (e) X
4. Bilangan minimal unsur yang perlu ditambahkan kepada  $H$  (dalam soalan 3) supaya suatu hubungan kesetaraan terhasil ialah:
  - (a) 13
  - (b) 15
  - (c) 17
  - (d) 19
  - (e) X

...2/-

5.  $M$  adalah suatu hubungan atas  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Maka

- (a)  $M = \{(x, y) \mid x \leq y\}$  simetri
- (b)  $M = \{(x, y) \mid x < y\}$  refleksif
- (c)  $M = \{(x, y) \mid x \geq y\}$  kesetaraan
- (d)  $M = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$  transitif
- (e) X

6.  $H_7 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod{7}\}$  dan  $[x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid (x, y) \in H_7\}$ . Maka

- (a)  $[6] \cap [4] = [10]$
- (b)  $[1] \cup [3] \cup [5] = [0] \cup [2] \cup [4] \cup [6]$
- (c)  $[6583871] = [8603967]$
- (d)  $[4] = [-16999]$
- (e) X

7.  $\vartheta : A \rightarrow B$  adalah suatu fungsi 1 – 1. Pilih pernyataan berikut yang palsu:

- (a)  $(a_1)\vartheta = (a_2)\vartheta \Rightarrow a_1 = a_2$
- (b)  $a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1\vartheta \neq a_2\vartheta$
- (c)  $a_1 = a_2 \Rightarrow (a_1)\vartheta = (a_2)\vartheta$
- (d)  $a_1\vartheta \neq a_2\vartheta \Rightarrow a_1 \neq a_2$
- (e) X

8.  $A$  dan  $B$  adalah set,  $|A| = 4$  dan  $|B| = 3$ . Maka bilangan fungsi keseluruhan  $\vartheta : A \rightarrow B$  ialah:

- (a) 35
- (b) 37
- (c) 39
- (d) 41
- (e) X

9. Diberi  $A$  adalah suatu set dan  $|A| = 22121939$  dan  $\alpha, \beta, \gamma$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $A$ . Maka

- (a)  $\alpha\beta$  1 – 1  $\Rightarrow \alpha^{-1}$  wujud
- (b)  $a(\alpha\beta) = a(\beta\alpha) \forall a \in A$
- (c)  $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$
- (d) songsang  $\alpha, \beta$  dan  $\gamma$  tetap wujud kerana  $|A|$  terhingga
- (e) X

10.  $G = \langle \mathbb{Z}_{13} - \{0\}, \otimes \rangle \Rightarrow$

- (a)  $\langle [10] \rangle = G$
- (b)  $|[2]| > 6$
- (c)  $[2]^{-1} = [9]$
- (d)  $|[7]| = 13$
- (e) X

11.  $M = \left\langle \left\{ A \in M_{2 \times 2} \mid |A| \geq 1 \right\}, \cdot \right\rangle \Rightarrow$

- (a)  $\begin{pmatrix} 6583871 & 8603967 \\ 12221939 & 88888888 \end{pmatrix} \in M$
- (b)  $M$  memuaskan hukum  $H_1, H_2, H_3$  dan  $H_4$
- (c)  $M$  adalah suatu kumpulan
- (d)  $A, B \in M \Rightarrow AB = BA$
- (e) X

12.  $\langle Z, x \rangle$  tidak memuaskan hukum  $H_i$  bagi  $i = ?$
- (a) 1                  (b) 2                  (c) 3                  (d) 4                  (e) 5
13.  $X = \{z \in Z \mid 1 \leq z < 14 \text{ dan } z \text{ ganjil}\}$ .  $x \otimes y \equiv xy \pmod{14}$ . Maka  $\langle X - \{m\}, \otimes \rangle$  adalah suatu kumpulan jika  $m = ?$
- (a) 1                  (b) 3                  (c) 7                  (d) 11                  (e) 13
14.  $G$  adalah suatu kumpulan dan  $g \in G \Rightarrow g^2 = e$ . Maka
- (a)  $G$  adalah kitaran                  (b)  $|G| = 1747$                   (c)  $Z(G) = G$   
(d)  $G = K_4$  atau  $C_4$                   (e) X
15.  $\alpha = (123)(4567)$ ,  $\beta = (147)(258369)$ ,  $\gamma = (134)(45678)$ . Maka  $g = \alpha\beta\gamma \Rightarrow$
- (a)  $g^3 = e$                   (b)  $g^{168} \in A_9$                   (c)  $g = (137)(43651)(2498)(13)$   
(d)  $|g| = 26$                   (e) X
16. Peringkat yang paling tinggi untuk unsur-unsur dalam  $S_9$  ialah
- (a) 9                  (b) 14                  (c) 20                  (d) 24                  (e) X
17. Peringkat yang paling tinggi untuk unsur-unsur dalam  $A_{18}$  ialah
- (a) 120                  (b) 126                  (c) 140                  (d) 168                  (e) 240
18. Bilangan unsur yang berbentuk  $(hi)(abcd)(efg) \in S_9$  ialah
- (a) 15120    (b) 7560    (c) 2520    (d) 1260    (e) X
19. Bilangan subkumpulan  $C_5$  dalam  $S_6$  ialah
- (a) 18                  (b) 36                  (c) 54                  (d) 72                  (e) 144
20.  $C = \{\alpha \in S_5 \mid \alpha^6 = e\} \Rightarrow |C| = ?$
- (a) 65                  (b) 66                  (c) 67                  (d) 68                  (e) X

II. Arahan sama dengan soalan I.

(100/100)

1. Pilih pernyataan yang palsu: Katakan  $G = D_4^{(23)}(1324)$ . Maka

- (a)  $G < S_4$                   (b)  $G \triangleleft S_4$   
(c)  $G$  mempunyai empat pantulan dan empat putaran  
(d)  $G = D_4(1324)$                   (e) X

...4/-

2. Pilih pernyataan yang palsu:  $S_4$  mempunyai tepat
- satu subkumpulan  $H$  yang  $|H|=12$ .
  - tiga subkumpulan  $H$  yang  $|H|=8$ .
  - empat subkumpulan  $H$  yang  $|H|=6$ .
  - satu subkumpulan  $H$  yang  $|H|=4$ .
  - X
3. Pilih pernyataan yang palsu:  $G$  adalah suatu kumpulan dan  $H < G$ . Maka
- |   |   |
|---|---|
| (a) $G$ kitaran $\Rightarrow H$ kitaran   | (b) $G$ kitaran $\Rightarrow H$ abelan          |
| (c) $G$ simpel $\Rightarrow H$ simpel     | (d) $ G =p^n \Rightarrow  H =p^n$ , $p$ perdana |
| (e) <input checked="" type="checkbox"/> X |   |
4. Set  $H$  berikut adalah suatu subkumpulan bagi  $\langle A_4, \cdot \rangle$  jika
- |   |   |
|---|---|
| (a) $H = \{ e, (123), (321), (124), (421), (14)(23), (234), (432), (13)(24), (12)(34) \}$ |   |
| (b) $H = \{ e, (1234), (4321), (13)(24) \}$   | (c) $H = \langle (1234), (56) \rangle$    |
| (d) $\langle (2354)(54) \rangle$  | (e) <input checked="" type="checkbox"/> X |
6. Diberi  $H < S_4$  dan  $|H \cap A_4| = m$ . Maka
- |   |  |
|---|--|
| (a) $m=3$ jika $H = S_4(4)$                       |  |
| (b) $m=5$ jika $H = D_4(1234)$                    |  |
| (c) $m=7$ jika $H = K_4$                          |  |
| (d) $m=10$ jika $H = \langle (123), (14) \rangle$ |  |
| (e) <input checked="" type="checkbox"/> X         |  |
7. Diberi  $G$  suatu kumpulan dan  $H < G$ ,  $K < G$ . Maka
- |                    |   |                                 |
|--------------------|---|---------------------------------|
| (a) $H \cup K < G$ | (b) $HK < G$                              | (c) $\overline{(H \cap K)} < G$ |
| (d) $HZ(G) < G$    | (e) <input checked="" type="checkbox"/> X |                                 |
8. Pilih pernyataan yang benar:
- |   |  |
|---|--|
| (a) $A_5(123) = A_5(1435)$                | (b) $(1465)A_6 = A_6(12)$                |
| (c) $K_4(123) = K_4(124)$                 | (d) $H(13) = H(24)$ jika $H = D_4(1234)$ |
| (e) <input checked="" type="checkbox"/> X |  |
9.  $H = \langle (1234), (134) \rangle \Rightarrow |H| = ?$
- |       |        |        |        |   |
|-------|--------|--------|--------|---|
| (a) 8 | (b) 12 | (c) 15 | (d) 24 | (e) <input checked="" type="checkbox"/> X |
|-------|--------|--------|--------|---|

10. Pilih pernyataan yang palsu:  $H < A_4$  dan  $[A_4 : H] = m$ . Maka  $m$
- (a) 1      (b) 2      (c) 3      (d) 4      (e) X
11.  $Z(D_4(1234)) = \{e, \vartheta\} \Rightarrow \vartheta = ?$
- (a) (13)(24)      (b) (14)(23)      (c) (12)(34)      (d) (1234)      (e) X
12. Diberi  $H < S_4$  dan  $A_4 = K_4 H$ . Maka  $H = ?$
- (a)  $\langle (1234) \rangle$       (b)  $\langle (123) \rangle$   
(c)  $\langle (12) \rangle$       (d)  $\langle (12)(34) \rangle$       (e) X
13. Pilih pernyataan yang benar:
- (a)  $S_4 = K_4 D_4(1234)$       (b)  $S_4 = K_4 A_4$       (c)  $S_4 = A_4 \langle (12) \rangle$   
(d)  $S_4 = A_4 \langle (123) \rangle$       (e) X
14. Wujud subkumpulan  $H < A_5$  sedemikian  $|H| = ?$
- (a) 30      (b) 15      (c) 12      (d) 8      (e) X
15. Pilih pernyataan yang benar:  $S_4 / K_4$
- (a) adalah kumpulan yang isomorfik dengan  $D_6(123456) / \langle (14)(25)(36) \rangle$   
(b) adalah kumpulan kitaran  
(c) adalah kumpulan abelan  
(d) adalah kumpulan yang mempunyai empat subkumpulan  $C_2$   
(e) X
16.  $G = \langle x, y \mid x^2 = y^4 = e, x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$  adalah suatu kumpulan. Maka
- (a)  $|G| = 6$   
(b)  $G$  adalah abelan  
(c)  $G$  adalah kitaran  
(d)  $G$  mempunyai suatu subkumpulan yang berperingkat 5  
(e) X

17. Berikut adalah sifir Cayley separuh suatu kumpulan  $G = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ .

	$e^1$	$a$	$a^2$	$b$	$ab$	$a^2b$
$e$	$e$	$a$	$a^2$	$b$	$ab$	$a^2b$
$a$	$a$	$a^2$	$e$	$ab$	$a^2b$	$b$
$a^2$	$a^2$	$e$	$a$	$a^2b$		
$b$	$b$	$a^2b$				
$ab$	$ab$					
$a^2b$	$a^2b$					

Maka

- (a)  $G \cong C_2 \times C_3$       (b)  $G$  isomorfik dengan  $\langle Z, -[0], \otimes \rangle$   
 (c)  $ba^2 = ab^2$       (d)  $aba = b$       (e) X

18.  $G$  adalah suatu kumpulan dengan sifir Cayley berikut. Maka

- (a)  $G \cong C_8$       (b)  $G \cong C_4 \times C_2$       (c)  $G \cong C_2 \times C_2 \times C_2$   
 (d)  $G \cong D_4(1234)$       (e)  $G \cong Q_8$

	1	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
1	1	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$a$	$a$	$a^2$	$a^3$	1	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$b$
$a^2$	$a^2$	$a^3$	1	$a$	$a^2b$	$a^3b$	$b$	$ab$
$a^3$	$a^3$	1	$a$	$a^2$	$a^3b$	$b$	$ab$	$a^2b$
$b$	$b$	$a^3b$	$a^2b$	$ab$	1	$a^3$	$a^2$	$a$
$ab$	$ab$	$b$	$a^3b$	$a^2b$	$a$	1	$a^3$	$a^2$
$a^2b$	$a^2b$	$ab$	$b$	$a^3b$	$a^2$	$a$	1	$a^3$
$a^3b$	$a^3b$	$a^2b$	$ab$	$b$	$a^3$	$a^2$	$a$	1

Table 5.2

19.  $G$  adalah suatu kumpulan dengan sifir Cayley berikut. Maka

- (a)  $G = C_{12}$       (b)  $G = C_6 \times C_2$       (c)  $G = D_6(123456)$   
 (d)  $G = A_4$       (e)  $G_{12}$

	1	$c$	$c^2$	$a$	$b$	$ab$	$ca$	$cb$	$cab$	$c^2a$	$c^2b$	$c^2ab$
1	1	$c$	$c^2$	$a$	$b$	$ab$	$ca$	$cb$	$cab$	$c^2a$	$c^2b$	$c^2ab$
$c$	$c$	$c^2$	1	$ca$	$cb$	$cab$	$c^2a$	$c^2b$	$c^2ab$	$a$	$b$	$ab$
$c^2$	$c^2$	1	$c$	$c^2a$	$c^2b$	$c^2ab$	$a$	$b$	$ab$	$ca$	$cb$	$cab$
$a$	$a$	$cb$	$c^2ab$	1	$ab$	$b$	$cab$	$c$	$ca$	$c^2b$	$c^2a$	$c^2$
$b$	$b$	$cab$	$c^2a$	$ab$	1	$a$	$cb$	$ca$	$c$	$c^2$	$c^2ab$	$c^2b$
$ab$	$ab$	$ca$	$c^2b$	$b$	$a$	1	$c$	$cab$	$cb$	$c^2ab$	$c^2$	$c^2a$
$ca$	$ca$	$c^2b$	$ab$	$c$	$cab$	$cb$	$c^2ab$	$c^2$	$c^2a$	$b$	$a$	1
$cb$	$cb$	$c^2ab$	$a$	$cab$	$c$	$ca$	$c^2b$	$c^2a$	$c^2$	1	$ab$	$b$
$cab$	$cab$	$c^2a$	$b$	$cb$	$ca$	$c$	$c^2$	$c^2ab$	$c^2b$	$ab$	1	$a$
$c^2a$	$c^2a$	$b$	$cab$	$c^2$	$c^2ab$	$c^2b$	$ab$	1	$a$	$cb$	$ca$	$c$
$c^2b$	$c^2b$	$ab$	$ca$	$c^2ab$	$c^2$	$c^2a$	$b$	$a$	1	$c$	$cab$	$cb$
$c^2ab$	$c^2ab$	$a$	$cb$	$c^2b$	$c^2a$	$c^2$	1	$ab$	$b$	$cab$	$c$	$ca$

Table 5.3

20. Pilih pernyataan yang palsu:

- (a)  $\langle M_{2 \times 2}, +, \cdot \rangle$  adalah suatu gelanggang  
 (b)  $\langle Z_{1747}, \oplus, \otimes \rangle$  adalah suatu medan  
 (c)  $\langle Z, +, \cdot \rangle$  adalah suatu domain integer  
 (d)  $M = \langle R, +, \times \rangle$  adalah suatu medan  $\Rightarrow M$  adalah suatu domain integer  
 (e) X

III.  $G$  adalah suatu kumpulan  $H < G$  dan  $K < G$ . Buktikan atau sangkalkan

- (i)  $HK < G$
- (ii)  $H \cup K < G$
- (iii)  $H - K < G$
- (iv)  $H \cap K < G$
- (v)  $C_G(H) = \{ c \in G \mid ch = hc \ \forall h \in H \} < G$
- (vi)  $N_G(H) < G$  yang mana  $N_G(H) = \{ g \in G \mid H^g = H \}$
- (vii) Diberi  $H = \{ e, (123), (321) \} < S_5$  dan  $K = \{ e, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \} < S_4$ .  
Cari

$$|C_{S_5}(H)| \text{ dan } |N_{S_4}(K)|.$$

(100/100)

IV. (a)  $G$  adalah suatu kumpulan  $H \triangleleft G$  dan  $K \triangleleft G$ . Buktikan

$$(i) \quad HK \triangleleft G \qquad (ii) \quad H \cap K \triangleleft G$$

(b)  $G$  dan  $L$  adalah kumpulan dan  $\vartheta : G \rightarrow L$  adalah suatu homomorfisma.

- (i) Buktikan  $G\vartheta < L$
- (ii) Buktikan  $K = \{ k \in G \mid k\vartheta = e_L \} \triangleleft G$
- (iii) Apakah syarat yang perlu diberi supaya  $(G\vartheta)K$  adalah suatu kumpulan?

(100/100)

-ooo0ooo-