UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MAT 122 – Persamaan Pembezaan I

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Persamaan pembezaan $(x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$ mempunyai suatu faktor pengamir dalam bentuk $\frac{1}{x^k}$.

   Tentukan nilai k dan seterusnya selesaikan persamaan pembezaan tersebut.

   (b) Tunjukkan bahawa pada selang $[0, \pi]$, kedua-dua fungsi $y_1(x) \equiv 1$ dan $y_2(x) = \cos x$ memenuhi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 - y^2} = 0 \quad , \quad y(0) = 1.$$

   Adakah hal ini bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan. Jelaskan jawapan anda.

   (c) Selesaikan persamaan pembezaan

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

(100 markah)

2. (a) Diberikan masalah nilai awal

$$y' = \tfrac{1}{2} - x + 2y \quad , \quad y(0) = 1 \qquad (1)$$

   (i) Tunjukkan dengan mengguna rumus Euler bahawa

$$y_k = (1+2h)y_{k-1} + h(\tfrac{1}{2} - x_{k-1})$$

   (ii) Tunjukkan bahawa $y_1 = (1 + 2h) + x_1/2$ dan seterusnya

$$y_n = (1 + 2h)^n + x_n/2$$

   (iii) Dapatkan satu rumus bagi ralat rumus setempat e_{n+1} dalam sebutan x dan penyelesaian tepat ϕ jika kaedah Euler digunakan bagi masalah nilai awal (1) di atas.

(b) Selesaikan persamaan pembezaan

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

sekitar titik biasa $x=0$. Nyatakan selang di mana penyelesaian ini sah.

(100 markah)

3. (a) Selesaikan $(D^2 - 4D + 4)y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$ jika diberikan $D = \frac{d}{dx}$.

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan peringkat kedua tak homogen

$$(D^2 + 1)y = f(x) \qquad (2)$$

di mana $D = \frac{d}{dx}$.

Tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi per(2) diberikan oleh

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_a^x f(\beta) \sin(x - \beta)\, d\beta .$$

(Petunjuk: $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$)

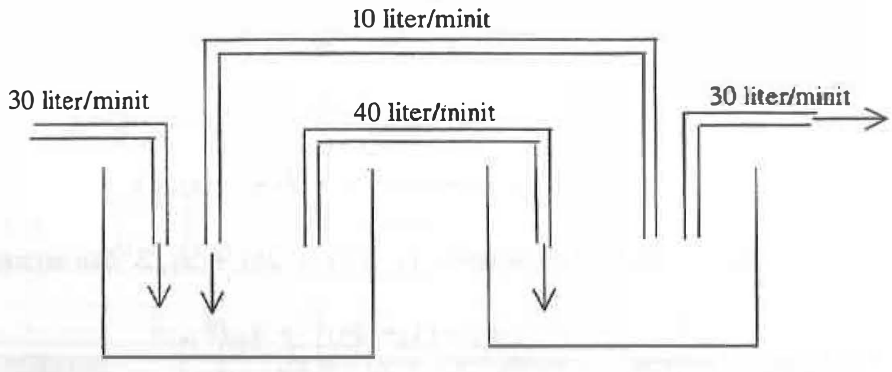
(100 markah)

4. (a) Dapatkan penyelesaian am bagi sistem tak homogen

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

pada selang $(-\infty, \infty)$.

(b) Pertimbangkan dua tangki A dan B. Katakan tangki A



Rajah 1

mengandungi 500 liter air garam dengan 500gm garam telah dilarutkan, sedangkan tangki B mengandungi 500 liter air. Air mengalir ke dalam tangki A dengan kadar 30 liter seminit, dan campuran itu mengalir dari A ke B dengan kadar 40 liter seminit. Dari B, 10 liter seminit dipamkan kembali ke tangki A, sedangkan 30 liter seminit dikeluarkan daripada sistem (lihat Rajah 1). Katakan x dan y mewakili amaun garam di dalam tangki A dan tangki B masing-masing, maka kadar perubahan amaun garam di dalam setiap tangki dapat dirumuskan dengan sistem.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{40}{500}x + \frac{10}{500}y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{40}{500}x - \left(\frac{10}{500} + \frac{30}{500}\right)y.$$

(i) Tunjukkan bahawa

$$625\frac{d^2y}{dt^2} + 100\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Seterusnya, dapatkan y.

(ii) Cari amaun garam yang maksimum di dalam tangki B. Bilakah kepekatan maksimum ini berlaku?

(100 markah)

- oooOooo -