UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MAA 111 - Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA PULUH TIGA soalan dalam DUA BAHAGIAN di dalam LAPAN halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

BAHAGIAN A mengandungi TIGA PULUH soalan objektif. Jawab SEMUA soalan di dalam borang OMR yang disediakan. Pilih jawapan yang paling sesuai.

BAHAGIAN B mengandungi TIGA soalan. Jawab soalan 31 yang diwajibkan dan salah satu soalan yang lain.

BAHAGIAN A (*60 markah*)

1. Pilih sistem persamaan yang wajar dipertimbangkan sebagai sistem persamaan linear 2×3.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 &= 2 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

2. Pilih sistem persamaan yang mempunyai penyelesaian $\{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3\}$.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 &= 8 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_3 &= 9 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= 3 \\ x_2^2 - x_3^2 &= 5 \end{aligned}$

...2/-

3. Pilih sistem persamaan yang tak konsisten.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 1 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 3 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 5 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 1 \\ 8x_1 + 4x_2 &= 0.8 \end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &= 6 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 15 \end{aligned}$

4. Pilih sistem persamaan yang mempunyai penyelesaian unik.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 &= 2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

Jawab soalan 5 dan 6 berpandukan sistem berikut:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_3 &= 22 \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

5. Nilai penentu matriks koefisen bagi sistem ialah:

(a) tidak tertakrif (b) 4 (c) 0 (d) 22 (e) 8

6. Sistem mempunyai penyelesaian

(a) remeh (b) konsisten (c) tak konsisten (d) unik (e) am

7. Pilih pernyataan yang salah.

(a) Terdapat tiga jenis Operasi Baris Permulaan
(b) $R_i^j = R_j^i$
(c) $R_i^j = R_j^i$ jika $i = j$
(d) $R_i(\alpha) = R_j(\alpha)$
(e) $R_i^j(\alpha) = R_j^i(\alpha)$ jika $\alpha = 0$

...3/-

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 9 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 7 \end{array}\right]$ merupakan matriks imbuhan bagi satu sistem persamaan linear 3×3.

Dari langkah-langkah penyelesaian sistem tersebut, pilih langkah di mana kesilapan pertama telah dilakukan.

(a) $\xrightarrow{R_2^1(2)} \xrightarrow{R_3^1(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 10 & 13 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$ (b) $\xrightarrow{R_3^2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 13 & 17 \end{array}\right]$

(c) $\xrightarrow{R_3^2(-10)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 33 & 66 \end{array}\right]$ (d) $\xrightarrow{R_3(1/33)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

(e) $\xrightarrow{R_2^3(2)} \xrightarrow{R_1^3(-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

9. Pilih matriks yang bukan *BEB*.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Pilih matriks yang bukan *BEBT*.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. Pilih pemyataan yang benar.

(a) Semua matriks *BEB* adalah matriks *BEBT*.
(b) Wujud matriks *BEBT* yang bukan matriks *BEB*.
(c) Setiap matriks *BEB* mempunyai pemasukan sifar.
(d) Wujud matriks *BEBT* dengan pemasukan sifar.
(e) Setiap matriks *BEBT* mempunyai pemasukan sifar.

12. Pilih pemyataan yang benar mengenai sistem persamaan linear.

(a) Semua sistem homogen mempunyai penyelesaian tak remeh.
(b) Semua sistem homogen tidak mempunyai penyelesaian remeh.
(c) Wujud sistem homogen tanpa penyelesaian remeh.
(d) Semua sistem tak homogen tidak mempunyai penyelesaian remeh.
(e) Wujud sistem tak homogen dengan penyelesaian remeh.

...4/-

13. Pilih pernyataan yang tidak benar mengenai sistem persamaan linear.

(a) Semua sistem homogen adalah konsisten.
(b) Wujud sistem homogen yang konsisten.
(c) Semua sistem tak homogen adalah konsisten.
(d) Wujud sistem tak homogen yang konsisten.
(e) Sistem tak homogen yang tidak mempunyai penyelesaian adalah tak konsisten.

14. Apakah syarat yang cukup supaya suatu sistem persamaan linear homogen $m \times n$ mempunyai penyelesaian tak remeh?

(a) $m=n$ (b) $m \neq n$ (c) $m>n$ (d) $m<n$ (e) $m>1$

15. Apakah syarat yang perlu supaya suatu sistem persamaan linear adalah tak konsisten? Sistem itu

(a) linear (b) tak linear (c) mempunyai banyak penyelesaian
(d) mempunyai penyelesaian unik (e) tak homogen

16. Diberi $\begin{bmatrix} x-3 & x+2 \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+4 & -y+3 \\ u & v \end{bmatrix}$. Maka $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =$

(a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

17. Diberi $A \in M_{m \times n}$ dan $B \in M_{n \times m}$, serta $AB = BA$. Maka

(a) B ialah matriks identiti (b) B ialah matriks singular
(c) $A = B$ (d) $A^{-1} = B$ (e) $m=n$

18. Diberi $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $C = AB$. Maka $C =$

(a) $[C_{ij}]_{2 \times 2}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (e) tidak tertakrif

19. Diberi $I_3 \xrightarrow{R_3^1(2)} A$. Maka $A^{-1} =$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

...5/-

20. Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Maka $A^{-1} =$

(a) I_3 (b) *BEB* bagi A (c) *BEBT* bagi A (d) A^T (e) tidak wujud

21. Diberi $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$. Maka minor bagi a_{22}, $M_{22} =$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ (b) 4 (c) 1 (d) -1 (e) -4

22. Diberi $A = [a_{ij}]_{13\times 13}$ ialah suatu matriks segi tiga atas dengan $a_{ii} = 3i - 9$. Maka $|A| =$

(a) 0 (b) 51 (c) 273 (d) 1692 (e) 31911

23. Katakan A adalah matriks tak singular. Maka $|A^{-1}| =$

(a) 0 (b) $|A|$ (c) $1/|A|$
(d) $|B|$ di mana B ialah *BEBT* bagi A (e) tidak tertakrif

24. Katakan A adalah matriks singular. Maka $|A^{-1}| =$

(a) 0 (b) $|A|$ (c) $1/|A|$
(d) $|B|$ di mana B ialah *BEBT* bagi A (e) tidak tertakrif

25. Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Maka $Adj\,(A) =$

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ -13 & -1 & -9 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ -13 & 4 & -9 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 8 & 4 & -9 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 8 & -1 & -9 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 6 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

26. Diberi $A \in M_{4\times 4}$ dan $|A| = -5$. Maka $|Adj\,(A)| =$

(a) 1 (b) -5 (c) 25 (d) -125 (e) 625

...6/-

27. Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ dan $N(A)$ adalah ruang nol bagi A. Jika $\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y} \in N(A)$, maka

(a) $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ (b) $A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}$ (c) $A\underset{\sim}{x} = A\underset{\sim}{y} = I_2$

(d) $A\underset{\sim}{x} + A\underset{\sim}{y} = A\underset{\sim}{x} - A\underset{\sim}{y}$ (e) $A\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} = A\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x}$

28. Diberi $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. Pilih pernyataan yang tidak benar.

(a) S adalah set yang tak bersandar linear.
(b) $|S| = -2$.
(c) dim [Julat (S)] = 3.
(d) S merentang R^3.
(e) S merupakan suatu asas bagi R^3.

29. Katakan S merupakan suatu asas bagi R^4. Maka

(a) $\underset{\sim}{0} \in S$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$

(c) $S \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ merentang R^4

(d) $S \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ bukan suatu asas bagi R^4

(e) $S \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ merupakan suatu asas bagi R^4

30. Diberi T adalah suatu set yang tak bersandar linear dan $S \subset T \subset M_{2\times 2}$. Maka

(a) S adalah set yang bersandar linear.
(b) S adalah set yang tak bersandar linear.
(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$.
(d) dim [Julat (S)] $\neq$ dim [Julat (T)].
(e) $T - S$ adalah set yang bersandar linear.

...7/-

BAHAGIAN B *(40 markah)*

31.(a) Katakan $A \in M_{n\times n}$

(i) Nyatakan takrif nilai eigen A serta takrif vektor eigen yang sepadan.

(ii) Katakan $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underset{\sim}{v} \neq \underset{\sim}{0}$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ supaya $A\underset{\sim}{v} = \lambda \underset{\sim}{v}$. Gunakan takrif di bahagian (i) untuk menunjukkan bahawa $\underset{\sim}{v}$ adalah suatu vektor eigen yang sepadan dengan nilai eigen λ.

Seterusnya, tunjukkan bahawa A adalah matriks singular jika $\lambda = 0$.

(6 markah)

(b) Diberi $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(i) Cari $p(\lambda)$ iaitu polinomial cirian bagi A.

(ii) Nilaikan $p(0)$. Apakah signifikasi nilai ini? Adakah A matriks singular atau tidak?

(iii) Cari nilai-nilai eigen bagi A dan vektor-vektor eigen yang sepadan.

(iv) Tahkikkan bahawa set vektor-vektor eigen yang dicari dalam bahagian (iii) adalah set yang tak bersandar linear.

(v) Nyatakan suatu matriks tak singular P dan suatu matriks pepenjuru D supaya $P^{-1}DP = A$.

(vi) Adakah A matriks terpepenjurukan?

(14 markah)

32.(a) Katakan $A \in M_{n\times n}$.

(i) Dengan menggunakan rumus $A[\mathrm{Adj}(A)] = |A|\, I_n$, tunjukkan bahawa $\mathrm{Adj}(A)$ adalah matriks tak singular jika dan hanya jika A adalah matriks tak singular.

(ii) Tunjukkan bahawa jika A tak singular, maka $A[\mathrm{Adj}(A)] = [\mathrm{Adj}(A)]A$.

(iii) Dapatkan rumus bagi $|\mathrm{Adj}(A)|$ dalam sebutan kuasa $|A|$.

(iv) Berikan satu contoh matriks-matriks $A, B \in M_{2\times 2}$ di mana $B \neq \mathrm{Adj}(A)$ tetapi $AB = BA = |A|\, I_2$.

(10 markah)

(b) Katakan $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Takrifkan:

$a_{ii} = 1$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;

$a_{(i-1)\,i} = 1$ untuk setiap $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$;

$a_{n1} = 1$;

dan selain dari itu

$a_{ij} = 0$.

...8/-

(i) Cari A bila $n = 2$ dan bila $n = 3$.

(ii) Tunjukkan bahawa $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bila $n = 4$.

(iii) Kira nilai $|A|$ bagi setiap kes $n = 2$, 3 dan 4.
Seterusnya cadangkan rumus am bagi $|A|$ dalam sebutan n.

(10 markah)

33.(a) Katakan V adalah suatu ruang vektor dan $\underset{\sim}{0}$ adalah unsur identiti penambahan dalam V. Gunakan takrif ruang vektor untuk membuktikan yang berikut:

(i) $0\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$ untuk setiap $\underset{\sim}{v} \in V$.

(ii) $\alpha\, \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$ untuk setiap skalar α.

(iii) $\alpha\, \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$ jika dan hanya jika $\alpha = 0$ atau $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$.

(7 markah)

(b) Katakan $V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$. Jika $\underset{\sim}{v_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, takrifkan operasi penambahan $\oplus$ dan operasi pendaraban skalar $\odot$ sebagai

$$\underset{\sim}{v_1} \oplus \underset{\sim}{v_2} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad \alpha \odot \underset{\sim}{v_1} = \alpha \odot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

(i) Tunjukkan bahawa V dengan operasi penambahan dan pendaraban skalar seperti yang ditakrifkan di atas bukan suatu ruang vektor.

(ii) Nyatakan takrif operasi-operasi penambahan dan pendaraban skalar yang dapat menunjukkan bahawa V adalah suatu ruang vektor.

(6 markah)

(c) Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(i) Cari ruang nol, $N(A)$ bagi A.

(ii) Apakah dimensi bagi $N(A)$ ini?

(iii) Adakah set vektor dari lajur-lajur A bersandar linear atau tidak? Jika ianya bersandar linear, tuliskan satu daripada vektor tersebut sebagai gabungan linear vektor-vektor yang lain.

(7 markah)

-oooOooo-