UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2006/2007

April 2007

ZCT 304/3 - Keelektrikan dan Kemagnetan

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LAPAN** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

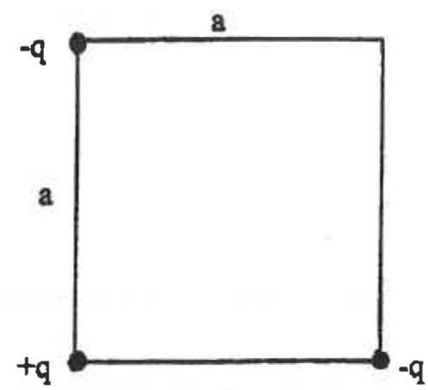
Jawab mana-mana **LIMA** soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Hitung keikalan dan kecapahan bagi $\vec{r}/r^a$. Apakah ketumpatan cas $\rho(r)$ yang akan menghasilkan medan $\vec{E} = (q/4\pi\varepsilon_0)(\vec{r}/r^a)$? Apakah keupayaan bagi medan elektrik ini?

(40/100)

(b) Tiga cas titik terletak di penjuru satu segiempat sama dengan sisi a seperti Rajah 1 di bawah. Berapakah kerja yang diperlukan untuk membawa satu lagi cas +q dari infiniti ke penjuru keempat? Berapakah kerja yang perlu dilakukan untuk menghimpun keseluruhan konfigurasi cas-cas tersebut?

(60/100)



Rajah 1

2. (a) Suatu sfera berjejari a dengan pusatannya terletak di titik asalan mempunyai ketumpatan cas $\rho = Ar^2$ di mana A adalah pemalar. Satu sfera lain berjejari $2a$ adalah sepusat dengan sfera pertama. (i) Dapatkan medan elektrik di kawasan $a < r < 2r$. (ii) Hitung fluks elektrik $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}$ melalui permukaan sfera yang lebih besar.

(40/100)

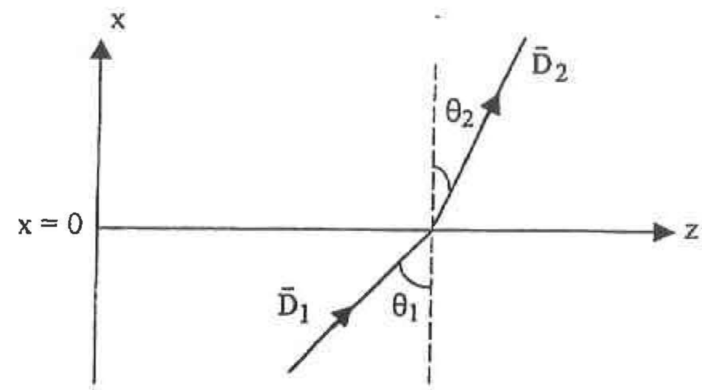
(b) Satu konduktor berbentuk sfera dan berjejari a telah dicas dengan cas positif bermagnitud Q. Sepusat dengan konduktor tersebut adalah satu sfera berjejari b. Ruang di antara kedua sfera ini telah diisi dengan dielektrik (pemalar dielektrik relatif $\varepsilon_r = \kappa$). (i) Dapatkan **D**, **E**, dan **P** di semua kawasan: $r < a$, $a < r < b$, dan $r > b$. (ii) Hitung ketumpatan cas terikat permukaan σ_b di permukaan $r = b$, dan ketumpatan cas terikat isipadu ρ_b di ruang berisi dielektrik.

(60/100)

(3). (a) Di sempadan antara dua medium dielektrik dengan pemalar dielektrik masing-masing, ε_1 dan ε_2, buktikan bahawa $E_{\perp 1} = E_{\perp 2}$ dan $D_{\parallel 1} = D_{\parallel 2}$. Anggap tiada cas bebas wujud di sempadan antara kedua dielektrik tersebut.

(40/100)

(b)



Rajah 2

Vektor sesaran elektrik di ruang $x < 0$ adalah $\mathbf{D}_1 = 1.5\hat{x} - 2.0\hat{y} + 3.0\hat{z}$ Coul/m^2. Jika $1.5\varepsilon_0$ dan $3\varepsilon_0$ adalah pemalar-pemalar dielektrik bagi kawasan $x < 0$ dan $x > 0$ masing-masing dan tiada cas bebas di sempadan $x = 0$, tentukan: (i) $\mathbf{E}_2$ di kawasan $x > 0$, dan (ii) sudut-sudut θ_1 dan θ_2. Rujuk Rajah 2.

(60/100)

(4). (a) Satu poligon mempunyai lapan sisi di mana panjang setiap sisi adalah a. Ia membawa arus I pada arah lawan jam. Dapatkan medan magnet **B** yang teraruh di pusatan poligon tersebut.

(50/100)

(b) Satu konduktor silinderan yang panjang mempunyai jejari a dan membawa arus I pada arah z. Ketumpatan arus isipadunya **J** tidak seragam pada keratan rentas dawai konduktor itu. Ia bergantung kepada jejari mengikut fungsi $J = b\rho$ di mana b adalah malar. Dapatkan medan magnet **B** di semua kawasan.

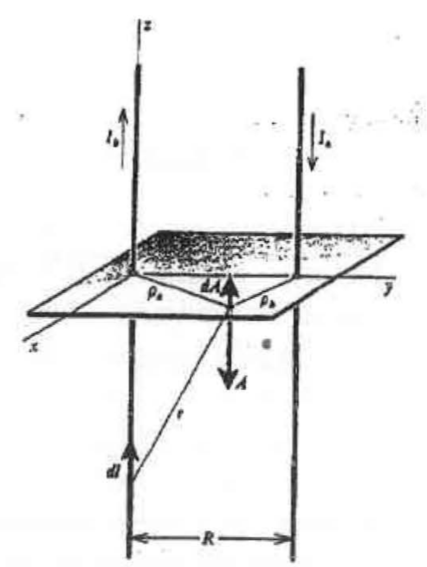
(50/100)

(5). (a) Satu dawai membawa arus I pada arah paksi z dan panjangnya adalah L. Tunjukkan bahawa vektor keupayaan magnet **A** yang terhasil pada jarak s dari dawai tersebut adalah $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{s} \hat{z}$. Hitung vektor aruhan magnet **B** di situ dengan menggunakan rumus $\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}$.

(40/100)

(b) Pertimbangkan Rajah 3 di bawah yang menunjukkan dua dawai yang sangat panjang dan berkedudukan selari. Jarak permisahan di antara dawai adalah R dan setiap dawai membawa arus I_a dan I_b masing-masing. Hitung vektor keupayaan magnet **A** dan vektor aruhan magnet **B** di titik P yang terletak pada satah yang ditunjukkan.

(60/100)



Rajah 3

(6). (a) Jika aruhan elektromotans bagi suatu litar adalah $\varepsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B$ di mana Φ_B adalah fluks magnet yang melalui atau menembusi permukaan litar. Tunjukkan bahawa ε juga mematuhi persamaan $\varepsilon = -\frac{d}{dt}\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$. $\vec{A}$ adalah vektor keupayaan magnet.

(20/100)

(b) Tunjukkan bahawa medan magnet yang terhasil di dalam satu solenoid yang unggul dengan lilitan n per meter adalah $B = \mu_0 n I$ di mana I adalah arus yang dibawa oleh solenoid tersebut.

(20/100)

(c) Dua solenoid unggul sepaksi mempunyai bilangan lilitan n_1 per meter bagi solenoid bahagian dalam dan n_2 per meter bagi solenoid bahagian luar. Jejari solenoid bahagian dalam adalah a dan bahagian luar b. Solenoid bahagian dalam membawa arus I_1 dan solenoid bahagian luar membawa arus yang berfungsikan masa $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ di arah yang berlawanan di mana ω adalah frekuensi sudut dan ϕ adalah pemalar. Dapatkan medan magnet **B** di kawasan-kawasan yang berikut: (i) $r < a$, dan (ii) $a < r < b$. Hitung elektromotan ε teraruh di solenoid bahagian dalam.

(60/100)

Vector Derivatives

Cartesian Coordinates

$$d\boldsymbol{\ell} = \hat{\mathbf{i}}\,dx + \hat{\mathbf{j}}\,dy + \hat{\mathbf{k}}\,dz, \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Cylindrical Coordinates

$$d\boldsymbol{\ell} = \hat{\mathbf{r}}\,dr + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,r\,d\phi + \hat{\mathbf{k}}\,dz, \qquad dV = r\,dr\,d\phi\,dz$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Spherical Coordinates

$$d\boldsymbol{\ell} = \hat{\mathbf{r}}\,dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,r\,d\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,r\sin\theta\,d\phi, \qquad dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Vector Formulas

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

Derivatives of Sums

- 000 O 000 -

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$

Derivatives of Products

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

Second Derivatives

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla\times(\nabla f) = 0$$

Integral Theorems

$$\int_V (\nabla\cdot\mathbf{A})\,dV = \oint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$ Gauss's (divergence) Theorem

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}$$ Stokes's (curl) Theorem

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f)\cdot d\boldsymbol{\ell} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

$$\int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) dV = \oint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$ Green's Theorem

Physical Constants

$c = 2.998 \times 10^8$ m/s	Speed of light
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 (or H/m)	Permeability constant in vacuum
$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2 (or F/m)	Permittivity constant in vacuum
$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2 = 8.988 \times 10^9$ Nm^2/C^2	
$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C	Magnitude of electron charge
$m_e = 0.9109 \times 10^{-30}$ kg	Electron mass

Useful Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

Binomial Expansion

$$(1+\epsilon)^p = 1 + p\epsilon + \frac{p(p-1)}{2!}\epsilon^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\epsilon^3 + \ldots$$

Notation for Position Vector

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{i}}\,x + \hat{\mathbf{j}}\,y + \hat{\mathbf{k}}\,z$$

$$r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{x}}{r}$$

- 000 O 000 -