

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2006/2007

April 2007

ZCT 218/3 - Mathematical Methods
[Kaedah Matematik]

Duration: 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **SIX** printed pages before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instruction: Answer any **FIVE** questions. Students are allowed to answer all questions in Bahasa Malaysia or in English.

Arahan: *Jawab mana-mana LIMA soalan. Pelajar dibenarkan menjawab semua soalan sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

Each question is worth 100 points. Total marks are 500 points.
[Setiap soalan bernilai 100 markah. Jumlah markah adalah 500.]

- (1) Consider the following function:
[Pertimbangkan fungsi berikut:]

$$f(x) = \begin{cases} -\pi; & -\pi < x < 0 \\ x; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (1)$$

Determine the **Fourier series** representation for (1).
[Tentukan perwakilan siri Fourier bagi (1)].

(100/100)

- (2) Solve the following initial value problem using the **Laplace transform method**:
[Selesaikan masalah nilai awal yang berikut dengan menggunakan kaedah transformasi Laplace:]

$$y'' - y = e^{-t} - 2te^{-t}, \quad y = y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

(100/100)

- (3) (a) Consider the following function:
[Pertimbangkan fungsi berikut:]

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0 < t < 2 \\ 2t - 4; & 2 < t < 4 \\ 0; & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2)$$

Determine the **Fourier transform** of (2).
[Tentukan transformasi Fourier bagi (2).]

(65/100)

- (b) Consider the following form of differential equation:
[Pertimbangkan persamaan pembezaan yang berikut:]

$$y'' + \left\{ \frac{1-2a}{x} \right\} y' + \left\{ b^2 c^2 x^{2c-2} + \frac{a^2 - v^2 c^2}{x^2} \right\} y = 0 \quad (3)$$

State the general solution of Eq. (3) in terms of **Bessel functions**. Next, using (3), solve the following differential equation in terms of Bessel functions:

[Nyatakan penyelesaian am bagi (3) dalam sebutan fungsi-fungsi Bessel. Kemudian, dengan menggunakan (3), selesaikan persamaan yang berikut dengan menyatakan penyelesaian amnya dalam sebutan fungsi-fungsi Bessel:]

$$3xy'' + y' + 12y = 0$$

(35/100)

- (4) Consider the following 1-D **wave equation** in Cartesian coordinates:
[Pertimbangkan persamaan gelombang 1-D dalam koordinat Cartesian yang berikut:]

$$u_{tt} = 4u_{xx}; \quad u = u(x, t) \quad (4)$$

- (a) Determine the general solution of Eq. (4) using the **separation of variables method**. Show details of your work.
[Tentukan penyelesaian am bagi (4) menggunakan kaedah pembolehubah terpisahkan. Tunjukkan jalan kerja anda.]

(45/100)

- (b) Given the following initial and boundary conditions, determine the solution of Eq. (4):
[Dengan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal yang diberikan, tentukan penyelesaian khusus bagi persamaan (4):]

$$u(0, t) = 0; \quad u(3, t) = 0; \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u_t(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq 3$$

(55/100)

- (5) Consider the following 1-D **heat equation** in Cartesian coordinates:
[Pertimbangkan persamaan haba 1-D dalam koordinat Cartesian yang berikut:]

$$u_t = \frac{5}{9}u_{xx}; \quad u = u(x, t) \quad (5)$$

- (a) Determine the general solution of Eq. (5) using the **separation of variables method**. Show details of your work.

[Tentukan penyelesaian am bagi (5) dengan menggunakan kaedah pembolehubah terpisahkan. Tunjukkan jalan kerja anda.]

(40/100)

- (b) Given the following initial and boundary conditions, determine the solution of Eq. (5):

[Dengan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal yang diberikan, tentukan penyelesaian khusus bagi persamaan (5):]

$$u_x(0, t) = 0; \quad u_x\left(\frac{\pi}{3}, t\right) = 0; \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) = \cos(3x); \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

(60/100)

- (6) (a) Consider the following differential equation:

[Pertimbangkan persamaan pembezaan yang berikut:]

$$\ddot{\Theta} + \cot(\theta) \dot{\Theta} + l(l+1)\Theta = 0; \quad \Theta = \Theta(\theta) \quad (6)$$

Given the change of variables: $x = \cos(\theta)$

[Dengan transformasi pembolehubah:]

Show that Eq. (6) can be written in the form of:

[Tunjukkan bahawa persamaan (6) boleh ditulis dalam bentuk:]

$$(1-x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + l(l+1)\Theta = 0; \quad \Theta = \Theta(x) \quad (7)$$

Then, write the general solution of (7) and finally write the general solution of (6).

[Seterusnya, nyatakan penyelesaian am bagi (7) dan akhirnya tulis penyelesaian am bagi (6).]

(30/100)

(b) (i) State the general form of a **Laplace equation**.
 [Nyatakan bentuk am persamaan Laplace]

(ii) The ∇^2 in the spherical coordinates is given as:
 [Operator ∇^2 dalam sistem koordinat sfera diberikan sebagai:]

$$\nabla^2 = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot(\theta)}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}u_{\phi\phi}$$

Write the 2-D Laplace equation from (i) in spherical coordinates, independent of ϕ , i.e. $u = u(r, \theta)$

[Tuliskan persamaan Laplace 2-D dari (i) dalam sistem koordinat sfera, yang tidak bersandar terhadap ϕ yakni $u = u(r, \theta)$]

(iii) Determine the general solution of the 2-D Laplace equation in spherical coordinates in (ii), using the separation of variables method. Show details of your work.

[Tentukan penyelesaian am bagi persamaan Laplace dari (ii) dengan menggunakan kaedah pembolehubah terpisah. Tunjukkan jalan kerja anda.]

(70/100)

(a) [Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

Lampiran

Table of Laplace transform

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$t^{\alpha-1} e^{-at}$	$\frac{(\alpha-1)!}{(s+a)^\alpha}$

Introduction	1
Chapter I	10
Chapter II	25
Chapter III	40
Chapter IV	55
Chapter V	70
Chapter VI	85
Chapter VII	100
Chapter VIII	115
Chapter IX	130
Chapter X	145
Chapter XI	160
Chapter XII	175
Chapter XIII	190
Chapter XIV	205
Chapter XV	220
Chapter XVI	235
Chapter XVII	250
Chapter XVIII	265
Chapter XIX	280
Chapter XX	295
Chapter XXI	310
Chapter XXII	325
Chapter XXIII	340
Chapter XXIV	355
Chapter XXV	370
Chapter XXVI	385
Chapter XXVII	400
Chapter XXVIII	415
Chapter XXIX	430
Chapter XXX	445
Chapter XXXI	460
Chapter XXXII	475
Chapter XXXIII	490
Chapter XXXIV	505
Chapter XXXV	520
Chapter XXXVI	535
Chapter XXXVII	550
Chapter XXXVIII	565
Chapter XXXIX	580
Chapter XL	595
Chapter XLI	610
Chapter XLII	625
Chapter XLIII	640
Chapter XLIV	655
Chapter XLV	670
Chapter XLVI	685
Chapter XLVII	700
Chapter XLVIII	715
Chapter XLIX	730
Chapter L	745