

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

**JIM 317 – Persamaan Pembezaan II**

Masa : 3 jam

---

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung soalan.

Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

1. Diberi persamaan pembezaan

$$x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0, \quad x > 0$$

(a) Tunjukkan bahawa  $x = 0$  adalah titik singular sekata.

(15 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah Frobenius,

(i) tunjukkan bahawa hubungan jadi-semula bagi persamaan pembezaan tersebut ialah

$$a_k = \frac{1}{(k+r-1)^2} a_{k-1}, \quad k \geq 1$$

(ii) tunjukkan bahawa satu penyelesaian siri ialah

$$y = a_0 x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^k, \quad x > 0$$

(65 markah)

(c) Bincangkan bentuk penyelesaian kedua yang tak bersandar linear.

(20 markah)

2. (a) Tentukan nilai eigen nyata dan fungsi eigen yang bersepadan bagi masalah nilai sempadan berikut:

$$\begin{aligned} x^2 y'' - \lambda(xy' - y) &= 0 \\ y(1) &= 0 \\ y(2) - y'(2) &= 0. \end{aligned}$$

(50 markah)

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan autonomous berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x^4 - x^3 - 2x^2.$$

- (i) Cari semua titik genting bagi persamaan pembezaan tersebut.
- (ii) Lakarkan garisan fasa.
- (iii) Bincangkan kestabilan semua penyelesaian keseimbangan dan perilaku jangka panjang semua penyelesaian.

(50 markah)

3. (a) Tuliskan semula persamaan pembezaan

$$x(1-x)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1$$

dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville.

(30 markah)

(b) Buktikan masalah nilai sempadan

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1$$

$$|y(-1)| < \infty$$

$$|y(1)| < \infty$$

adalah masalah swa-adjoin.

(70 markah)

4. Pertimbangkan sistem persamaan pembezaan autonomous yang linear

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

dengan  $\alpha$  adalah pemalar dan  $\alpha \neq -1$ .

(a) Tunjukkan bahawa  $(0, 0)$  satu-satunya titik genting yang tak stabil.  
(25 markah)

(b) Tentukan syarat bagi pemalar nyata  $\alpha$  supaya  $(0, 0)$  merupakan titik pelana yang tak stabil.  
(45 markah)

(c) Bilakah  $(0, 0)$  akan menjadi titik lingkaran yang tak stabil?  
(30 markah)

5. Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = 2x - 3y + 1$$

$$y(1) = 5.$$

(a) Tentusahkan penyelesaian analitiknya adalah

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9} e^{-3(x-1)}.$$

(10 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah Euler, cari suatu rumus yang melibatkan  $c$  dan  $h$  untuk ralat pangkasan setempat.

(20 markah)

- (c) Cari batasan untuk ralat pangkas setempat dalam setiap langkah jika  $h = 0.1$  digunakan untuk penghampiran  $y(1.2)$ .

(20 markah)

- (d) Dengan menggunakan kaedah Euler, dapatkan hampiran  $y(1.2)$  dengan menggunakan  $h = 0.1$  dan  $h = 0.05$ .

(30 markah)

- (e) Kirakan ralat dalam bahagian (d) dan tentusahkan bahawa ralat pangkas global bagi kaedah Euler ialah  $O(h)$ .

(20 markah)