UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

JIM 315 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Berikan takrif berikut:
    (i) titik pedalaman set A.
    (ii) titik had set A.
    (iii) set A tertutup.
    (iv) set A terbuka.

(20 markah)

(b) Andaikan $S \subset \mathbb{R}$. Tunjukkan set S adalah terbuka jika dan hanya jika S^P set tertutup.

(30 markah)

(c) Katakan $B = \{(-10, 0] \cup (5, 7)\} \cap \mathbb{Q}$.
    (i) Cari titik pedalaman B.
    (ii) Cari titik had B.
    (iii) Tentukan sama ada B terbuka atau tertutup. Beri alasan anda.
    (iv) Tentukan sama ada B padat. Beri alasan anda.
    (v) Tentukan sama ada B terkait. Beri alasan anda.

(50 markah)

2. (a) Andaikan f selanjar pada $\mathbb{R}$. Bincangkan sama ada set $\{x: \ |f(x)| = 5\}$ terbuka atau tertutup.

(20 markah)

(b) Andaikan $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ adalah selanjar secara seragam pada C. Jika $\{c_n\}$ suatu jujukan Cauchy pada C, tunjukkan bahawa $\{f(c_n)\}$ ialah jujukan Cauchy.

(40 markah)

(c) Tunjukkan fungsi Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

adalah tak selanjar pada setiap nombor.

(40 markah)

3. (a) Tunjukkan bahawa

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \end{cases}$$

adalah selanjar pada 0 tetapi tak terbezakan pada 0.

(40 markah)

(b) Andaikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi syarat berikut:

(i) $f(a+b) = f(a)\,f(b)$, $a,\ b \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(0) = 1$.

(iii) f terbezakan pada 0.

Tunjukkan f terbezakan pada setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $f'(x) = f'(0)f(x)$.

(30 markah)

(c) Andaikan $f'(x) = 0$ untuk setiap x pada pedalaman selang S dan f selanjar pada S. Tunjukkan f adalah fungsi malar pada S.

(30 markah)

4. (a) Pertimbangkan fungsi $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Andaikan

$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Dapatkan $B(P\,;\,f)$ dan $A(P;\,f)$.

(30 markah)

(b) Jika fungsi f selanjar, $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = 0$, tunjukkan bahawa $f = 0$ pada $[a, b]$.

(30 markah)

(c) Dengan menggunakan Kriteria Riemann, tunjukkan $f(x) = x^3$ terkamirkan pada $[0, 1]$.

(40 markah)

- oooOooo -