UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

JIF 315 – Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 20 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

...2/-

1. Satu set permukaan dalam tiga dimensi diberi oleh ungkapan

$$w = 4x^2 + 9y^2 + 4z^2$$

(a) Tunjukkan bahawa titik (1,1,1) berada pada permukaan yang diberi oleh ungkapan

$$4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 17$$

(3 markah)

(b) Tunjukkan bahawa kecerunan (gradient) pada titik (1,1,1) diberi oleh ungkapan

$$\vec{N} = 8\hat{i} + 18\hat{j} + 8\hat{k}$$

(5 markah)

(c) Tunjukkan bahawa garis normal pada permukaan tangen pada titik (1,1,1) diberi oleh ungkapan

$$\vec{r} = (1+4t)\hat{i} + (1+9t)\hat{j} + (1+4t)\hat{k}$$

di mana t adalah parameter sembarangan.

(5 markah)

(d) Tunjukkan bahawa persamaan permukaan tangen pada titik (1,1,1) diberi oleh

$$4x + 9y + 4z - 17 = 0$$

(7 markah)

2. Pertimbangkan satu cas titik yang berada pada titik (1,1,1). Oleh itu keupayaan V disebabkan oleh cas ini diberi oleh ungkapan

$$V = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}}$$

(a) Dapatkan medan $\vec{E} = \vec{\nabla} V$ pada titik asalan.

(5 markah)

(b) Dapatkan $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ pada titik asalan.

(5 markah)

(c) Dapatkan $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ pada sebarang titik.

(5 markah)

(d) Tunjukkan bahawa

$$\iint \vec{E}.d\vec{A} = 0$$

di mana $d\vec{A}$ ialah elemen luas untuk permukaan sfera yang menutupi asalan dengan jejari $r = 0.5$ unit

(5 markah)

3. (a) Katakan satu daya yang diberi oleh ungkapan berikut

$$\vec{F} = (x-1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

telah bertindak keatas satu zarah dan telah menggerakkan zarah tersebut melalui lintasan dari (0,0,0)→(1,0,0)→(1,1,0)→(1,1,1). Dapatkan jumlah kerja yang dilakukan untuk menggerakkan zarah mengikut lintasan tersebut.

(10 markah)

(b) Pertimbangkan satu zarah yang berada pada titik $\vec{r}$ pada masa t seperti berikut

$$\vec{r} = 10\ \sin(20t)\hat{i} + 10\ \text{kos}(20t)\hat{j} + 5t\hat{k}$$

(i) Dapatkan halaju $\vec{v}$ untuk zarah ini pada masa $t = 1$ saat.

(3 markah)

(ii) Dapatkan pecutan $\vec{a}$ pada masa $t = 1$ saat.

(3 markah)

(iii) Dapatkan jarak yang di alami oleh zarah ini dari masa $t = 0$ ke $t = 1$.

(4 markah)

4. (a) Fungsi Gamma $\Gamma(n)$ ditakrifkan seperti berikut

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

Tunjukkan bahawa

$$\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Gunakan hubungan:

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(10 markah)

(b) (i) Fungsi Beta B(m,n) di takrifkan seperti berikut

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Buat gantian $x = \text{kos}^2\theta$, tunjukkan bahawa

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{kos}^{2m-1}\theta \, \sin^{2n-1}\theta \, d\theta$$

(5 markah)

(ii) Dari itu tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{kos}^3\theta \, \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{4}$$

(Boleh gunakan hubungan berikut $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$)

(5 markah)

5. (a) Kebanyakannya fungsi-fungsi khas di dalam fizik merupakan penyelesaian kepada persamaan pembezaan peringkat kedua, dan mempunyai pertalian jadi semula. Pertalian jadi semula untuk polinomial Legendre $P_n(x)$ ialah seperti berikut:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

dan diketahui bahawa

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$

Maka tunjukkan bahawa

(i) $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

(ii) $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

(10 markah)

(b) Salah satu daripada kegunaan fungsi-fungsi khas ialah untuk mewakili fungsi-fungsi tertentu di dalam bentuk polinomial. Dalam perkataan lain, satu polinomial f(x) dengan darjah m, boleh diwakili oleh polinomial Legendre, $P_n(x)$, seperti berikut:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m} a_n P_n(x)$$

di mana a_n ialah suatu pekali dan diberi oleh ungkapan

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

Dari itu dapatkan x^2 dalam sebutan polinomial Legendre iaitu

$$x^2=\sum_{n=0}^{2} a_n P_n(x)$$
$$=a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)$$

Gunakan sebutan Legendre seperti yang terdapat dalam soalan di atas untuk kamiran.

(10 markah)

- ooo O ooo -