
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan KSCP

Sidang Akademik 2002/2003

April 2003

ZCE 208/2 - MEKANIK KLASIK

Masa: 2 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua TIGA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia. Diberi bersama kertas soalan ini ialah Jadual Formula (2 muka surat).

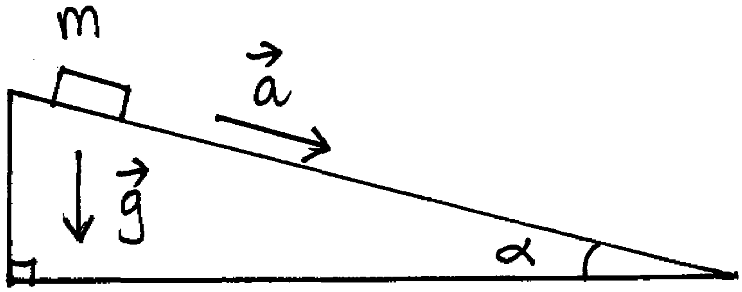
1.

(A) Daya suatu sistem diberi oleh

$$\vec{F_B} = (2xy + z^m)\ \vec{e}_1 + x^n\ \vec{e}_2 + 3xz^k\ \vec{e}_3.$$

Cari $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Jika sistem ini adalah suatu sistem konservatif, apakah nilai m, n, dan k?

(B) Suatu jasad berjisim m menggelongsor dengan suatu pecutan $\vec{a}$ dari rehat ke bawah suatu satah condong bersudut α di bawah pengaruh graviti. Daya rintangan yang menentang gerakan ini ialah $f = kmv^2$, di mana k ialah suatu konstan.



Rajah 1: Gerakan Jasad atas Satah Condong.

(a) Nyatakan Hukum Newton Kedua.

(b) Dengan menggunakan Hukum Newton Kedua, tulis persamaan gerakan Newton bagi partikel itu disepanjang satah.

(c) Cari laju v jasad itu selepas masa t.

(d) Tunjukkan bahawa masa yang diperlukan untuk jasad itu bergerak jarak x dari rehat ialah

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kx})}{\sqrt{kg}\sin\alpha}.$$

(33 Markah)

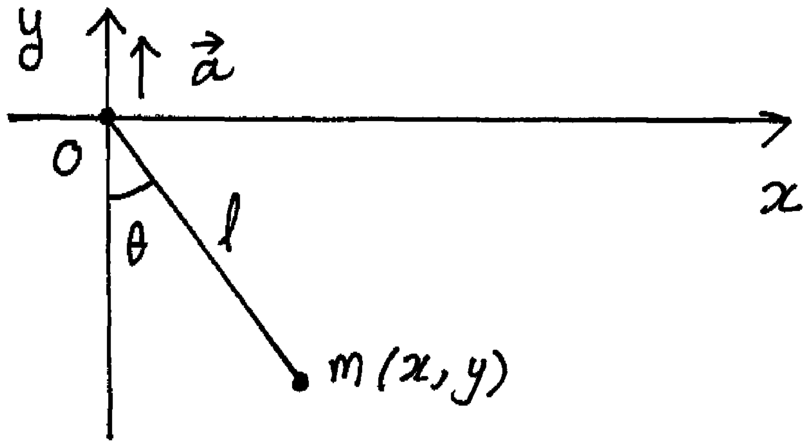
2.

(A) Nyatakan Prinsip Hamilton. Apakah formulanya dalam Kalkulus Variasi.

(B) Suatu bandul mudah panjang l dan bob berjisim m digantung pada suatu sokongan tidak berjisim yang bergerak ke atas secara tegak dengan pecutan $\vec{a}$ dari rehat.

(a) Apakah posisi bob itu (x, y) pada masa t.

(b) Cari halaju $\vec{v}$ jisim m pada masa t.



Rajah 2: Posisi Bandul pada masa $t = 0$.

(c) Cari (i) tenaga kinetik T, (ii) tenaga potensial U dan (iii) fungsi Lagrangian L dalam sebutan θ dan t.

(d) Tulis formula bagi persamaan gerakan Lagrange dan cari persamaan gerakan bandul itu.

(e) Cari tempoh untuk osilasi kecilnya.

(33 Markah)

3.

Suatu partikel P berjisim m dilemparkan secara tegak ke atas tinggi h di atas suatu titik A dipermukaan Bumi pada latitud utara θ. Anggapkan Bumi berputar dengan halaju sudut $\vec{\omega}$ terhadap paksinya.

(a) Apakah daya berkesan $\vec{F}_k$ bagi partikel P itu jika halajunya relatif ke Bumi ialah $\vec{v}_p$?

(b) Apakah daya emparan yang bertindak ke atas partikel itu? Untuk kes (soalan) ini kita boleh abaikan daya ini. Kenapa?

(c) Dengan menulis halaju sudut $\vec{\omega}$ dan halaju relatif partikel itu $\vec{v}_p$ dalam sebutan $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, dan $\vec{e}_z$, cari pecutan Coriolis yang bertindak ke atas partikel itu.

(d) Cari halaju awalnya dalam sebutan h.

(e) Cari komponen halaju ufuknya selepas masa t.

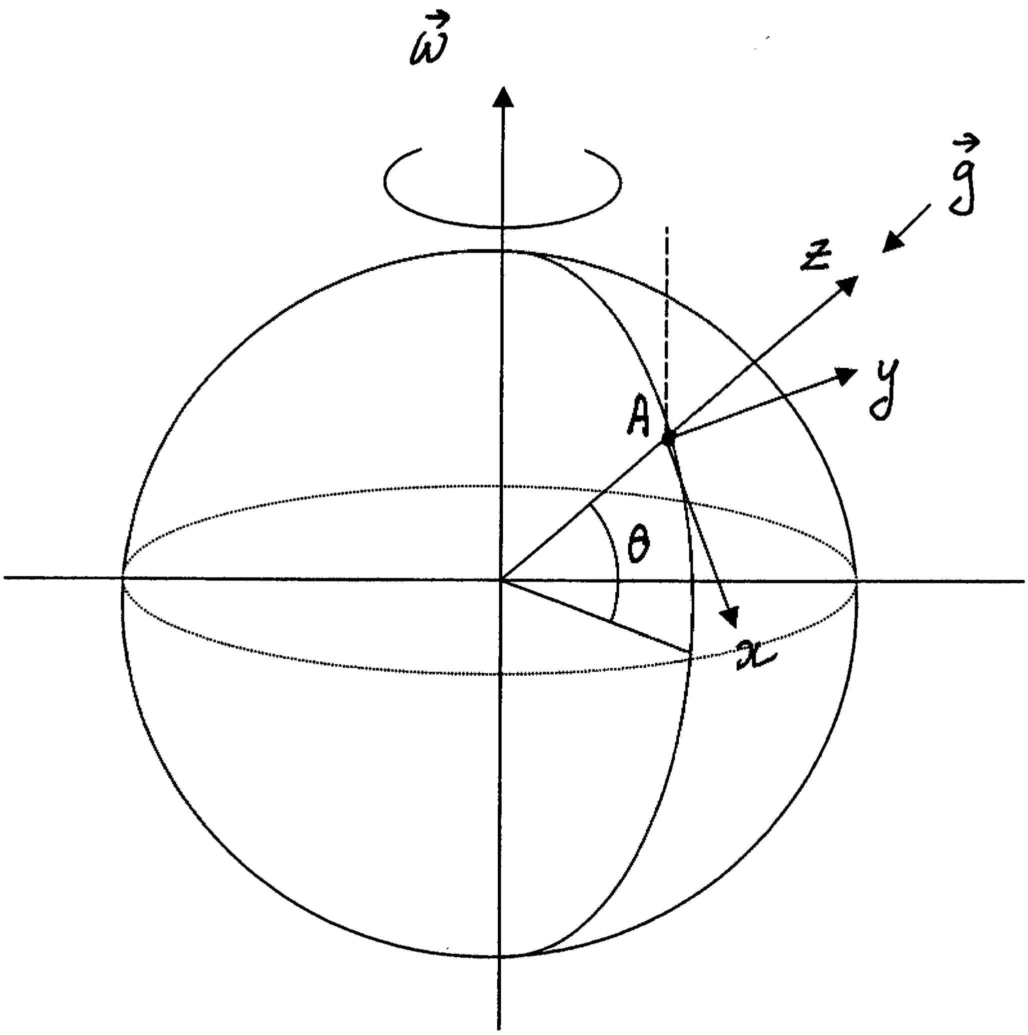
(f) Cari jarak ufuk yang dilalui oleh partikel itu selepas masa t.

(g) Cari masa yang diambil untuk partikel itu menghentam Bumi.

(h) Tunjukkan partikel itu akan menghentam suatu titik B di Bumi pada jarak

$$\frac{4}{3}\omega\cos\theta\sqrt{8h^3/g}$$

dari titik A dan ke barat dari A. Abaikan rintangan udara dan hanya timbangkan tinggi tegak yang kecil.



Rajah 3: Bumi berputar dengan halaju sudut $\vec{\omega}$ terhadap paksinya.

(34 Markah)

A P P E N D I X

E

USEFUL INTEGRALS*

E.1 ALGEBRAIC FUNCTIONS

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \left|\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right| < \frac{\pi}{2} \tag{E.1}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2 + x^2) \tag{E.2}$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2 + x^2}\right) \tag{E.3}$$

$$\int \frac{dx}{a^2x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{ax - b}{ax + b}\right) \tag{E.4a}$$

$$= -\frac{1}{ab}\coth^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right) \tag{E.4b}$$

$$= -\frac{1}{ab}\tanh^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right), \qquad a^2x^2 < b^2 \tag{E.4c}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a + bx} \tag{E.5}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \tag{E.6}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{E.7}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b), \quad a > 0 \tag{E.8a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\sinh^{-1}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right), \qquad \begin{cases} a > 0 \\ 4ac > b^2 \end{cases} \tag{E.8b}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \qquad \begin{cases} a < 0 \\ b^2 > 4ac \\ |2ax + b| < \sqrt{b^2 - 4ac} \end{cases} \tag{E.8c}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{E.9}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\sinh^{-1}\left(\frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{4ac - b^2}}\right), \qquad \begin{cases} c > 0 \\ 4ac > b^2 \end{cases} \tag{E.10a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \qquad \begin{cases} c < 0 \\ b^2 > 4ac \end{cases} \tag{E.10b}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{c}}{x}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2c}{x} + b\right), \qquad c > 0 \tag{E.10c}$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{2ax + b}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{E.11}$$

E.2 TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \tag{E.12}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x \tag{E.13}$$

* This list is confined to those (nontrivial) integrals that arise in the text and in the problems. Extremely useful compilations are, for example, Pie ce and Foster (Pi57) and Dwight (Dw61).

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\frac{a\tan(x/2)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right], \qquad a^2 > b^2 \tag{E.14}$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\frac{(a-b)\tan(x/2)}{\sqrt{a^2-b^2}}\right], \qquad a^2 > b^2 \tag{E.15}$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{b\sin x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)} - \frac{a}{b^2-a^2}\int \frac{dx}{a+b\cos x} \tag{E.16}$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| \tag{E.17a}$$

$$\int \tanh x\, dx = \ln\cosh x \tag{E.17b}$$

$$\int e^{ax}\sin x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x) \tag{E.18a}$$

$$\int e^{ax}\sin^2 x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right) \tag{E.18b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\pi/a} \tag{E.18c}$$

E.3 GAMMA FUNCTIONS

54

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx \tag{E.19a}$$

$$= \int_0^1 [\ln(1/x)]^{n-1}\, dx \tag{E.19b}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \text{for } n = \text{positive integer} \tag{E.19c}$$

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \tag{E.20}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{E.21}$$

$$\Gamma(1) = 1 \tag{E.22}$$

$$\Gamma\left(1\tfrac{1}{4}\right) = 0.906 \tag{E.23}$$

$$\Gamma\left(1\tfrac{3}{4}\right) = 0.919 \tag{E.24}$$

$$\Gamma(2) = 1 \tag{E.25}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \tag{E.26}$$

$$\int_0^1 x^m(1-x^2)^n\, dx = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(n+\frac{m+3}{2}\right)} \tag{E.27a}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \qquad n > -1 \tag{E.27b}$$