

**SIFAT DAN REKABENTUK BAGI TAMPALAN
BAK-BÉZIER BOLEH BERBENTANG**

YEOH WENG KANG

**UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
2013**

**SIFAT DAN REKABENTUK BAGI
TAMPALAN BAK-BÉZIER BOLEH BERBENTANG**

oleh

YEOH WENG KANG

**Tesis yang diserahkan untuk memenuhi keperluan
bagi Ijazah Doktor Falsafah**

July 2013

PENGHARGAAN

Saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada penyelia saya, Profesor Jamaludin Md. Ali, yang banyak membimbing dan memberi tunjuk ajar untuk menjayakan penyelidikan ini. Selain itu, setinggi-tinggi terima kasih saya ucapkan kepada ibu bapa saya, serta semua pihak yang pernah memberi bantuan, cadangan, motivasi dan dorongan kepada saya untuk mengharungi pelbagai rintangan sepanjang penyelidikan doktor falsafah ini. Tanpa sokongan dan kerjasama yang diberi, penyelidikan ini tidak mungkin dapat dijalankan dengan begitu lancar dan menghasilkan keputusan-keputusan yang diinginkan.

KANDUNGAN

PENGHARGAAN		ii
KANDUNGAN		iii
SENARAI JADUAL		vi
SENARAI RAJAH		vii
ABSTRAK		xi
ABSTRACT		xii
BAB 1	PENGENALAN	
1.1	Pendahuluan	1
1.2	Teori Asas Geometri Pembezaan	2
1.3	Permukaan Tergaris	4
1.4	Permukaan Boleh Berbentang	7
1.5	Lengkung Bézier	10
1.6	Objektif Penyelidikan	13
1.7	Susunan Tesis	19
BAB 2	TAMPALAN BÉZIER BOLEH BERBENTANG	
2.1	Pengenalan	21
2.2	Syarat Boleh Berbentang	21
2.3	Menaksirkan Syarat Boleh Berbentang Secara Geometri	23
	2.3.1 Kes 1	23
	2.3.2 Kes 2	27
2.4	Pengiraan Darjah Kebebasan	32
2.5	Rekabentuk bagi Tampilan Boleh Berbentang	34
	2.5.1 Kes 1 dengan Kaedah 1	35
	2.5.2 Kes 1 dengan Kaedah 2	43
	2.5.3 Kes 2 dengan Kaedah 1	46
	2.5.4 Kes 2 dengan Kaedah 2	58
2.6	Penghuraian Ringkas	65

BAB 3	TAMPALAN BAK-BÉZIER BOLEH BERBENTANG	
3.1	Pengenalan	67
3.2	Lengkung Kubik Bak-Bézier	67
3.3	Sifat untuk Lengkung Kubik Bak-Bézier	70
3.4	Lengkung Kubik Bak-Bézier dengan 3 Titik Kawalan	73
3.5	Syarat Boleh Berbentang bagi Tampalan Bak-Bézier Boleh Berbentang	75
3.6	Kes 1 dengan Kaedah Alternatif	84
BAB 4	GABUNGAN PERMUKAAN BAK-BÉZIER BOLEH BERBENTANG	
4.1	Pengenalan	91
4.2	Gabungan Permukaan Bak-Bézier Boleh Berbentang	91
	4.2.1 Pengiraan Darjah Kebebasan	92
4.3	Rekabentuk bagi Gabungan Permukaan	97
4.4	Contoh Rekabentuk	100
BAB 5	PENILAIAN KUALITI PERMUKAAN DENGAN GARIS PENYERLAH	
5.1	Pengenalan	105
5.2	Garis Penyerlah	105
5.3	Penilaian Kualiti Permukaan	107
5.4	Contoh dan Perbincangan	109
BAB 6	PEMETAAN TAMPALAN BAK-BÉZIER BOLEH BERBENTANG KEPADA SATAH	
6.1	Pengenalan	115
6.2	Pendahuluan untuk Lengkung dan Permukaan	115
6.3	Kelengkungan Geodesi bagi Tampalan Bak-Bézier Boleh Berbentang	118
6.4	Pemetaan Tampalan Bak-Bézier Boleh Berbentang kepada Satah	124
	6.4.1 Pemetaan (1)	129
	6.4.2 Pemetaan (2)	137
BAB 7	PERBINCANGAN DAN KESIMPULAN	146

RUJUKAN	150
LAMPIRAN	154
SENARAI PENERBITAN	157
ISTILAH	158

SENARAI JADUAL

Jadual 4.1	Bilangan darjah kebebasan untuk keselajaran yang berlainan	96
Jadual 4.2	Kaedah yang bersesuaian untuk keselajaran yang berlainan	99

SENARAI RAJAH

Rajah 1.1	Satah tangen dan normal permukaan	4
Rajah 1.2	Satu permukaan tergaris	5
Rajah 1.3	Paraboloid hiperbolik dalam selang $0 \leq u, v \leq 1$	6
Rajah 1.4	Contoh permukaan translasi	9
Rajah 1.5	Lengkung kubik Bézier	11
Rajah 1.6	Kaedah Aumann (1991)	13
Rajah 1.7	Permukaan boleh berbentang dengan tampalan-tampalan berbentuk segitiga	16
Rajah 2.1	Satu permukaan tergaris	22
Rajah 2.2	Dua lengkung sempadan dengan tiga titik kawalan	24
Rajah 2.3	Penggunaan simbol untuk menyelesaikan Persamaan (2.2)	25
Rajah 2.4	Binaan de Casteljaou bagi dua lengkung sempadan dengan empat titik kawalan	28
Rajah 2.5	Segiempat <i>IJK</i> pada (a) $u = 0$ dan (b) $u = 1$	30
Rajah 2.6	Penggunaan simbol untuk Kes 1	36
Rajah 2.7	Rangka titik kawalan bagi Contoh 2.2 dengan $f = \frac{1}{50}$	40
Rajah 2.8	Penyelesaian kepada Contoh 2.2 dengan $f = \frac{1}{50}$	41
Rajah 2.9	Penyelesaian kepada Contoh 2.2 dengan $f = \frac{1}{100}$	42

Rajah 2.10	Penyelesaian kepada Contoh 2.2 dengan $f = \frac{1}{25}$	42
Rajah 2.11	Penyelesaian kepada Contoh 2.3	45
Rajah 2.12	Penggunaan simbol untuk menyelesaikan Kes 2	46
Rajah 2.13	Dua lengkung sempadan dalam penyelesaian pertama	55
Rajah 2.14	Penyelesaian pertama kepada Contoh 2.4	55
Rajah 2.15	Dua lengkung sempadan dalam penyelesaian kedua	57
Rajah 2.16	Penyelesaian kedua kepada Contoh 2.4	57
Rajah 2.17	Penyelesaian pertama kepada Contoh 2.5	62
Rajah 2.18	Dua lengkung sempadan dalam penyelesaian kedua	63
Rajah 2.19	Penyelesaian kedua kepada Contoh 2.5	63
Rajah 2.20	Penyelesaian ketiga kepada Contoh 2.5	64
Rajah 3.1	Tiga lengkung kubik bak-Bézier dengan empat titik kawalan	70
Rajah 3.2	Fungsi-fungsi asas dengan $\lambda_0 = 1$ dan $\lambda_1 = 3$	71
Rajah 3.3	Fungsi-fungsi asas dengan $\lambda_0 = 3$ dan $\lambda_1 = 2$	71
Rajah 3.4	Lima lengkung kubik bak-Bézier dengan empat titik kawalan	73
Rajah 3.5	Lengkung kubik bak-Bézier dengan tiga titik kawalan	74
Rajah 3.6	Dua lengkung sempadan dengan tiga titik kawalan	75
Rajah 3.7	Tembereng garis yang selari dengan tangen bagi lengkung sempadan	77
Rajah 3.8	Penggunaan simbol untuk menaksirkan syarat boleh berbentang	78
Rajah 3.9	Segiempat IJLK pada $u = 0$	80
Rajah 3.10	Segiempat IJLK pada $u = 1$	81
Rajah 3.11	Penggunaan simbol untuk Kaedah Alternatif	85

Rajah 3.12	Rangka titik kawalan bagi Contoh 3.1	88
Rajah 3.13	Penyelesaian kepada Contoh 3.1 dengan $\lambda = \frac{3}{2}$ bagi kedua-dua lengkung a dan b	89
Rajah 3.14	Penyelesaian kepada Contoh 3.1 dengan $\lambda = \frac{9}{4}$ bagi kedua-dua lengkung a dan b	90
Rajah 4.1	Gabungan permukaan yang terdiri daripada dua tamapalan	93
Rajah 4.2	Tiga tamapalan pertama dalam sesuatu gabungan permukaan	97
Rajah 4.3	Rangka titik kawalan bagi tamapalan pertama	101
Rajah 4.4	Contoh rekabentuk untuk keselantaran G^0	102
Rajah 4.5	Contoh rekabentuk untuk keselantaran G^1	103
Rajah 4.6	Contoh rekabentuk untuk keselantaran C^1	104
Rajah 5.1	Penakrifan satu garis penyerlah	106
Rajah 5.2	Satu garis penyerlah dengan punca cahaya yang tunggal (1)	107
Rajah 5.3	Satu garis penyerlah dengan punca cahaya yang tunggal (2)	108
Rajah 5.4	Satu himpunan garis penyerlah hasil daripada sekumpulan punca cahaya yang selari	109
Rajah 5.5	Contoh rekabentuk untuk keselantaran G^0	110
Rajah 5.6	Gabungan permukaan pada Rajah 5.5 dengan satu himpunan garis penyerlah	110
Rajah 5.7	Contoh rekabentuk untuk keselantaran G^1	111
Rajah 5.8	Gabungan permukaan pada Rajah 5.7 dengan satu himpunan garis penyerlah	112
Rajah 5.9	Contoh rekabentuk untuk keselantaran C^1	113
Rajah 5.10	Gabungan permukaan pada Rajah 5.9 dengan satu himpunan garis penyerlah	113

Rajah 6.1	Tampalan bak-Bézier boleh berbentang bagi Bahagian 6.3	119
Rajah 6.2	Lengkung yang terletak pada satah	125
Rajah 6.3	Tampalan bak-Bézier boleh berbentang pada \mathbf{R}^3	129
Rajah 6.4	Tampalan bak-Bézier boleh berbentang yang dipetakan pada satah	130
Rajah 6.5	Sudut θ_1 pada satah	132
Rajah 6.6	Penentuan titik (X_1, Y_1) pada satah	133
Rajah 6.7	Sudut θ_2 pada satah	134
Rajah 6.8	Tampalan pertama dalam Contoh 4.3	136
Rajah 6.9	Tampalan bagi Rajah 6.8 dipetakan kepada satah (X, Y)	137
Rajah 6.10	Gabungan permukaan yang terdiri daripada dua tampalan	138
Rajah 6.11	Sudut θ pada satah	139
Rajah 6.12	Sudut θ_3 pada satah	140
Rajah 6.13	Sudut θ_4 pada satah	142
Rajah 6.14	Gabungan permukaan bagi Contoh 4.3	144
Rajah 6.15	Gabungan permukaan bagi Rajah 6.14 yang dipetakan pada satah	145

**SIFAT DAN REKABENTUK BAGI
TAMPALAN BAK-BÉZIER BOLEH BERBENTANG**

ABSTRAK

Permukaan boleh berbentang telah digunakan secara meluas dalam rekabentuk geometri dan perkilangan kerana permukaan tersebut boleh dibentangkan pada sesuatu satah tanpa terkedut atau terkoyak. Tujuan tesis ini adalah memperkenalkan tampalan bak-Bézier boleh berbentang yang terdiri daripada lengkung kubik bak-Bézier sebagai lengkung sempadan. Tampalan tersebut yang mempunyai sifat seperti yang dinyatakan di atas, senang dinilai, serta mempunyai titik-titik kawalan yang kurang, digunakan untuk membentuk gabungan permukaan bak-Bézier boleh berbentang. Kualiti berkenaan sesuatu gabungan permukaan yang memenuhi syarat keselantaran G^0 , G^1 atau C^1 kemudian disemak dengan menggunakan garis penyerlah. Selain itu, satu teknik untuk memetakan tampalan bak-Bézier boleh berbentang yang terletak pada ruang tiga dimensi kepada satah, turut dibincangkan dalam tesis ini.

**PROPERTIES AND DESIGN FOR
DEVELOPABLE BÉZIER-LIKE PATCHES**

ABSTRACT

Developable surfaces are widely utilized in geometric modeling and manufacturing because they can be developed on a plane without creasing or tearing. The purpose of this thesis is to introduce developable Bézier-like patches with Bézier-like cubic curves as their boundary curves. These patches which have the property as stated above, easily evaluated, and having fewer control points, are used to construct developable composite Bézier-like surfaces. The quality of the composite surfaces that satisfies G^0 , G^1 or C^1 continuity condition is then evaluated by using highlight lines. Besides, a development technique of a developable Bézier-like patch on 3-dimensional space to a plane, is also discussed.

BAB 1

PENGENALAN

1.1 PENDAHULUAN

Dalam kehidupan harian, kita bertemu dengan pelbagai benda yang berbentuk permukaan. Bola, kasut, tayar, kereta, kapal dan sebagainya membekalkan bentuk fizikal untuk permukaan. Kebanyakan bentuk permukaan kini dapat direka dan dilukis dengan menggunakan bantuan grafik komputer. Namun demikian, rekabentuk yang dilakukan selalunya bermula dengan lengkung, barulah diikuti dengan permukaan. Disebabkan oleh faktor ini, terdapat banyak penyelidikan yang dilaksanakan sejak 30 tahun yang lepas hanya menumpukan perhatian kepada lengkung (Salomon, 1999).

Suatu lengkung atau permukaan boleh diwakilkan dalam bentuk tersirat atau tak tersirat, sedangkan perwakilan yang lazim digunakan pada masa sekarang adalah dalam bentuk parameter. Sebagai contoh, $\mathbf{a}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ mewakili satu lengkung pada ruang tiga dimensi dengan parameter t terletak pada selang tertentu, biasanya $0 \leq t \leq 1$, manakala $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ pula mewakili satu permukaan dengan u dan v merupakan dua parameter yang berlainan untuk permukaan tersebut.

Perkara yang diminati oleh seseorang pereka adalah mencari permukaan yang senang dikawal dan dapat dilukis dengan bantuan grafik komputer. Oleh itu, fokus tesis ini adalah mengemukakan langkah-langkah yang berguna untuk mencapai matlamat ini.

Penekanan utama diberikan kepada syarat-syarat Matematik supaya permukaan yang dicari sesuai digunakan dalam rekabentuk yang dikaji.

1.2 TEORI ASAS GEOMETRI PEMBEZAAN

Sistem koordinat Cartesian dengan petua tangan kanan digunakan dalam tesis ini. Simbol untuk sesuatu titik dan vektor ditunjukkan dalam huruf tebal. Panjang bagi sesuatu vektor \mathbf{v} diwakili sebagai $\|\mathbf{v}\|$. Suatu vektor dengan panjangnya ialah 1 unit diperkenalkan sebagai vektor unit.

Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka hasil darab skalar bagi vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} diwakili sebagai

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (1.1)$$

manakala hasil darab silang bagi kedua-dua vektor tersebut ialah

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (1.2)$$

Daripada (1.1) dan (1.2), didapati

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= (a_1, a_2, a_3) \bullet (b_2 c_3 - b_3 c_2, b_3 c_1 - b_1 c_3, b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Perhatikan bahawa perwakilan tersebut akan menjadi tidak bermakna jika $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, iaitu melakukan hasil darab silang di antara satu pemalar dengan satu vektor. Dengan kiraan yang serupa, didapati $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c}$ akan menghasilkan penentu yang sama seperti $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Oleh itu,

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \bullet \mathbf{c},$$

iaitu tanda bagi titik dan silang boleh disaling tukar tanpa mengubah nilai hasil darab yang dikira. Namun demikian, perwakilan yang melibatkan kedua-dua tanda tersebut biasanya adalah diabaikan dan diringkaskan kepada $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$, yang diperkenalkan sebagai hasil darab skalar trirangkap. Secara umum (Rahman & Mulolani, 2001),

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = [\mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{a}] = [\mathbf{c} \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}] = -[\mathbf{a} \ \mathbf{c} \ \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \ \mathbf{a} \ \mathbf{c}] = -[\mathbf{c} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}].$$

Jika vektor \mathbf{a} , \mathbf{b} dan \mathbf{c} bukan merupakan vektor sifar serta tidak searah antara satu dengan yang lain, maka persamaan

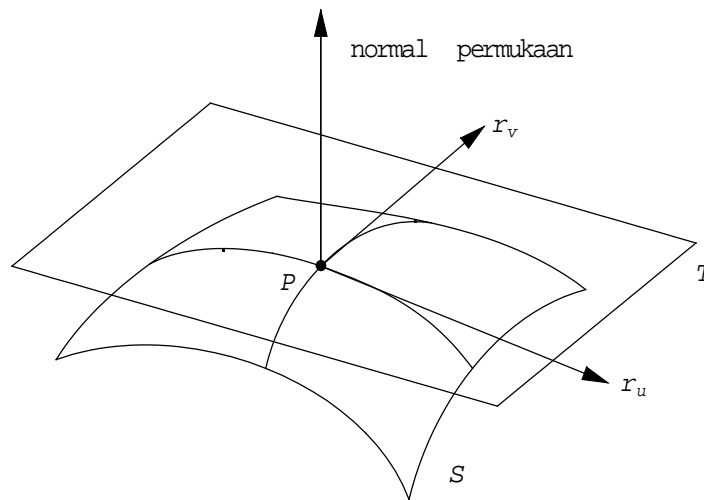
$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = 0$$

mengimplikasikan bahawa ketiga-tiga vektor tersebut adalah terletak pada satah yang sama.

Pembezaan separa untuk sesuatu permukaan $\mathbf{r}(u, v)$ dilambangkan sebagai

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \text{ dan } \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Dengan merujuk kepada Rajah 1.1, suatu titik \mathbf{P} pada permukaan S mempunyai satah tangen T yang ditentukan oleh vektor \mathbf{r}_u dan \mathbf{r}_v , manakala normal permukaan $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ merupakan vektor yang berserenjang dengan satah tersebut.



Rajah 1.1 Satah tangen dan normal permukaan

1.3 PERMUKAAN TERGARIS

Satu permukaan tergaris dapat dibentuk oleh satu garis lurus yang bergerak secara berterusan sepanjang satu lengkung dalam ruang tiga dimensi (Kreyszig, 1968). Garis lurus ini diperkenalkan sebagai garisan manakala lengkung tersebut dirujuk sebagai direktriks. Sebarang titik pada permukaan itu boleh diungkap sebagai

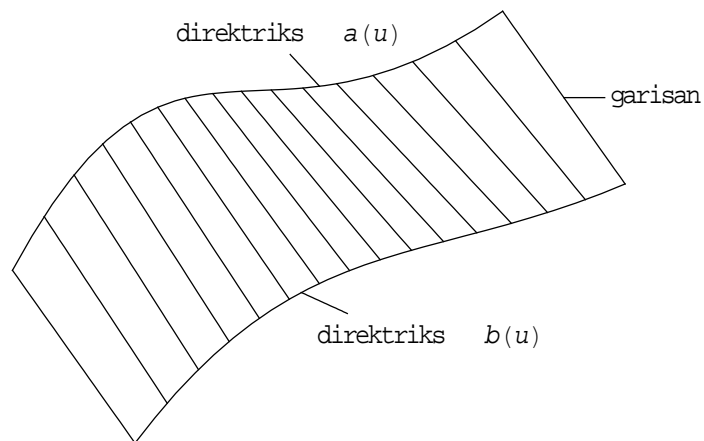
$$\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v \boldsymbol{\beta}(u), \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (1.3)$$

dengan $\boldsymbol{\alpha}(u)$ ialah direktriks atau lengkung asas bagi permukaan tergaris, manakala $\boldsymbol{\beta}(u)$ merupakan vektor unit yang menentukan arah bagi garisan untuk setiap titik pada direktriks.

Dengan cara yang lain, satu permukaan tergaris boleh diwakili sebagai sekumpulan garis lurus yang menggabungkan setiap pasangan titik yang sepadan di antara dua lengkung dalam ruang tiga dimensi (Faux & Pratt, 1981). Cara ini boleh dituliskan sebagai

$$\mathbf{r}(u, v) = (1-v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (1.4)$$

dengan $\mathbf{a}(u)$ dan $\mathbf{b}(u)$ merupakan direktriks, seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1.2.



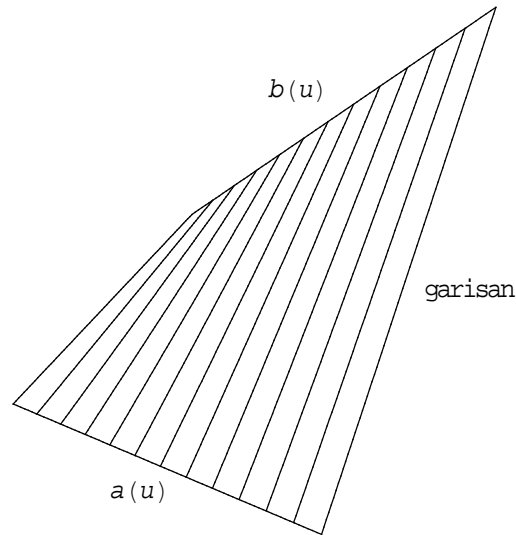
Rajah 1.2 Satu permukaan tergaris

Di sini kedua-dua persamaan (1.3) dan (1.4) akan menjadi sama jika $\mathbf{a}(u) = \boldsymbol{\alpha}(u)$ dan $\mathbf{b}(u) = \boldsymbol{\alpha}(u) + \boldsymbol{\beta}(u)$. Disebabkan oleh kajian yang dilakukan dalam tesis ini menggunakan dua lengkung sepadan untuk menjana permukaan yang dikehendaki, maka perwakilan (1.4) sebagai permukaan tergaris dipilih dalam perbincangan yang seterusnya.

Sebagai contoh, susunan paraboloid hiperbolik dalam bentuk

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (u, v, uv) \\ &= (1-v)(u, 0, 0) + v(u, 1, u) \end{aligned}$$

melambangkan satu permukaan tergaris yang terdiri daripada dua direktriks $\mathbf{a}(u) = (u, 0, 0)$ dan $\mathbf{b}(u) = (u, 1, u)$. Rajah 1.3 memaparkan permukaan tersebut yang terletak dalam selang $0 \leq u, v \leq 1$.



Rajah 1.3 Paraboloid hiperbolik dalam selang $0 \leq u, v \leq 1$

Permukaan tergaris mula dikaji oleh Gaspard Monge (1746 – 1818) sekitar tahun 1807 dengan menggunakan persamaan pembezaan separa berperingkat tiga. Usaha tersebut kemudian diteruskan oleh Hachette, atau dengan nama penuh Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 – 1834), iaitu seorang pakar Matematik Perancis yang menyelidik permukaan tersebut secara geometri (Struik, 1988).

1.4 PERMUKAAN BOLEH BERBENTANG

Permukaan boleh berbentang yang merupakan subset kepada permukaan tergaris adalah sejenis permukaan yang dapat dibentang pada sesuatu satah tanpa terkoyak atau terkedut. Pada peringkat awal, Leohard Euler (1707 – 1783) mengemukakan satu syarat yang perlu dipenuhi supaya pemetaan bagi sesuatu permukaan kepada satah bersifat boleh berbentang. Cadangan Euler kemudian diteruskan oleh Monge dalam kajiannya mulai tahun 1780. Perbincangan terperinci terhadap sejarah perkembangan permukaan boleh berbentang boleh diperoleh dalam Coolidge (1963).

Mengikut Kreyszig (1968), suatu permukaan tergaris perlu memenuhi syarat tertentu supaya permukaan itu merupakan permukaan boleh berbentang. Keputusan bagi penghuraian tersebut telah dirumuskan dalam teorem di bawah.

Teorem 1.1

Satu permukaan tergaris

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

merupakan satu permukaan boleh berbentang jika dan hanya jika

$$\left[\frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] \quad \frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] \quad \mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u) \right] = 0. \quad \square$$

Contoh 1.1

Dalam bahagian sebelum ini, permukaan tergaris yang terdiri daripada dua lengkung sempadan $\mathbf{a}(u) = (u, 0, 0)$ dan $\mathbf{b}(u) = (u, 1, u)$ digunakan untuk mewakili paraboloid hiperbolik. Daripada contoh tersebut, didapati

$$\frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] = (1, 0, 0),$$

$$\frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] = (1, 0, 1) \text{ dan}$$

$$\mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u) = (0, 1, u).$$

Namun demikian,

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] & \frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] & \mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u) \end{array} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

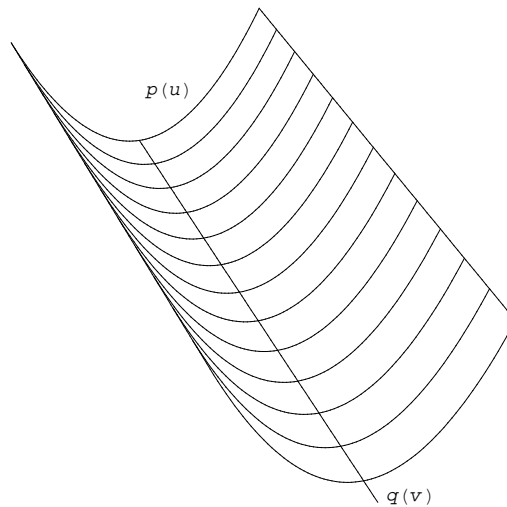
$$\neq 0.$$

Oleh itu, paraboloid hiperbolik yang tergolong dalam permukaan tergaris bukan merupakan permukaan boleh berbentang.

Contoh 1.2

Biar $\mathbf{p}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ mewakili satu lengkung pada ruang tiga dimensi dengan parameter u terletak pada selang tertentu. Jika lengkung tersebut ditranslasikan sepanjang satu arah yang diperwakili oleh lengkung arah $\mathbf{q}(v) = (x(v), y(v), z(v))$, maka permukaan $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p}(u) + \mathbf{q}(v)$ yang terbentuk merupakan permukaan translasi

(Dae, 2012). Contoh yang paling mudah adalah translasikan lengkung yang diberi sepanjang satu garis lurus. Rajah 1.4 menunjukkan permukaan translasi yang terbentuk hasil daripada parabola $p(u) = (0, u, u^2)$ ditranslasikan sepanjang garis $q(v) = (5v, 0, 0)$ dengan $-1 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 1$.



Rajah 1.4 Contoh permukaan translasi

Perhatikan bahawa perwakilan bagi permukaan tersebut boleh disusun sebagai

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{p}(u) + \mathbf{q}(v) \\
 &= (0, u, u^2) + (5v, 0, 0) \\
 &= (1-v)(0, u, u^2) + v(5, u, u^2)
 \end{aligned}$$

yang melambangkan satu permukaan tergaris yang terdiri daripada dua direktriks

$\mathbf{a}(u) = (0, u, u^2)$ dan $\mathbf{b}(u) = (5, u, u^2)$. Di sini,

$$\frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] = (0, 1, 2u),$$

$$\frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] = (0, 1, 2u),$$

$$\mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u) = (5, 0, 0)$$

yang memberikan

$$\left[\frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] \quad \frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] \quad \mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u) \right] = 0.$$

Oleh yang demikian, permukaan tergaris dalam contoh ini merupakan sejenis permukaan boleh berbentang.

Dalam rekabentuk geometri, lengkung Bézier kerap digunakan sebagai lengkung sempadan untuk membentuk permukaan boleh berbentang yang dikehendaki (Aumann, 2003, Chu *et al.*, 2008). Perbincangan terhadap lengkung Bézier disampaikan dalam bahagian berturutan, manakala penggunaan lengkung Bézier untuk membentuk satu permukaan boleh berbentang akan dibincangkan dalam Bab 2.

1.5 LENGKUNG BÉZIER

Lengkung Bézier telah diasas dan diperkembangkan oleh dua orang Perancis, Pierre Bézier dan Paul de Casteljaou, yang masing-masing berkhidmat dalam dua syarikat kereta yang berlainan iaitu Renault dan Citroën. Kegunaan awal bagi lengkung ini hanyalah memenuhi kehendak industri kenderaan (Marsh, 1999).

Satu lengkung Bézier berdarjah n ditakrifkan sebagai

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{V}_i, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (1.5)$$

dengan

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i \quad (1.6)$$

merupakan fungsi-fungsi asas dan \mathbf{V}_i ialah titik-titik kawalan.

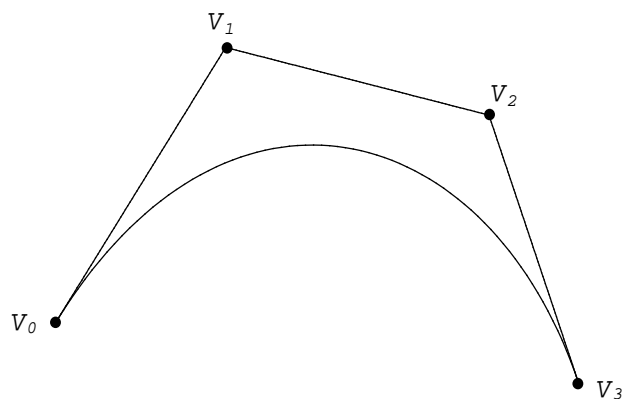
Gantikan $n = 2$ ke dalam (1.5) dan (1.6) menghasilkan

$$\mathbf{b}(u) = (1-u)^2 \mathbf{V}_0 + 2(1-u)u \mathbf{V}_1 + u^2 \mathbf{V}_2,$$

manakala gantian $n = 3$ memberikan

$$\mathbf{b}(u) = (1-u)^3 \mathbf{V}_0 + 3(1-u)^2 u \mathbf{V}_1 + 3(1-u)u^2 \mathbf{V}_2 + u^3 \mathbf{V}_3$$

dengan $0 \leq u \leq 1$. Rajah 1.5 memaparkan satu lengkung kubik Bézier dengan titik kawalan $\mathbf{V}_0 = (-5, 1, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (-3, 8, 6)$, $\mathbf{V}_2 = (5, 10, 5)$ dan $\mathbf{V}_3 = (10, 6, 0)$.



Rajah 1.5 Lengkung kubik Bézier

Pada peringkat awal, perwakilan (1.6) bukan merupakan fungsi asas bagi lengkung Bézier. Sehingga tahun 1972, Robin Forrest menyedari bahawa fungsi asas yang digunakan dalam lengkung Bézier sebenarnya adalah berbentuk (1.6) (Forrest, 1972). Fungsi asas ini dinamakan sebagai polinomial Bernstein yang diperkenalkan oleh Sergei Natanovich Bernshtein, seorang pakar Matematik Rusia, sewaktu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan teori penghampiran pada tahun 1912 (Salomon, 1999).

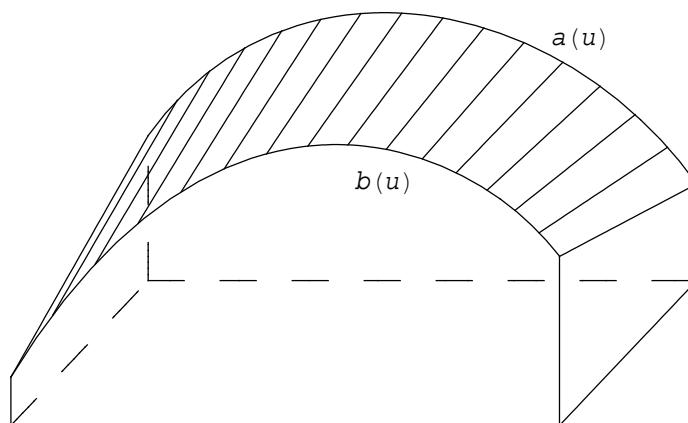
Lengkung Bézier yang berasaskan polinomial Bernstein mempunyai beberapa sifat yang berikut:

1. Lengkung yang dilukis menginterpolasi titik pertama dan titik terakhir.
2. Arah tangen pada titik pertama ialah V_0V_1 , iaitu lengkung tersebut yang bermula pada titik V_0 menuju ke arah V_1 . Begitu juga untuk arah tangen pada titik terakhir, sebagai $V_{n-1}V_n$.
3. Pemberat-pemberat bagi lengkung tersebut adalah baripusat, yang bermaksud hasil tambah bagi kesemua fungsi asas dalam sesuatu lengkung Bézier memberikan nilai 1. Sifat baripusat ini menjamin bentuk bagi sesuatu lengkung yang dilukis adalah bebas daripada sistem koordinat yang dipilih.
4. Setiap fungsi asas bagi lengkung adalah simetri di antara u dengan $(1-u)$, iaitu

$$B_{n-i}^n(u) = B_i^n(1-u),$$
 dengan $i = 0, 1, \dots, n$. Sifat ini mengimplikasikan bahawa susunan titik-titik kawalan yang terletak secara terbalik tidak akan mempengaruhi bentuk lengkung yang dilukis.
5. Lengkung yang dilukis terletak dalam hul cembung poligon kawalan.

1.6 OBJEKTIF PENYELIDIKAN

Rekabentuk permukaan boleh berbentang telah banyak dikaji sejak 20 tahun yang lalu. Terdapat beberapa pendekatan yang berlainan untuk membina sesuatu permukaan boleh berbentang. Aumann (1991) mengemukakan satu kaedah supaya permukaan boleh berbentang dapat dijana dengan menggunakan dua lengkung sempadan yang terdiri daripada lengkung Bézier. Dalam kaedah tersebut, kedua-dua lengkung sempadan terletak pada dua satah yang selari, dan unjuran permukaan yang dijana kepada satah seharusnya merupakan segiempat tepat. Rajah 1.6 menggambarkan kaedah yang dimaksudkan oleh Aumann.



Rajah 1.6 Kaedah Aumann (1991)

Lang dan Röschel (1992) melanjutkan kajian itu dengan mengemukakan tampalan Bézier-(1, n) nisbah. Mengikut kajian mereka, beberapa syarat keperluan yang mencirikan jaring kawalan serta pemberat bagi tampalan perlu dipenuhi supaya janaan terhadap tampalan yang dikehendaki dapat dilaksanakan. Namun demikian, kaedah ini

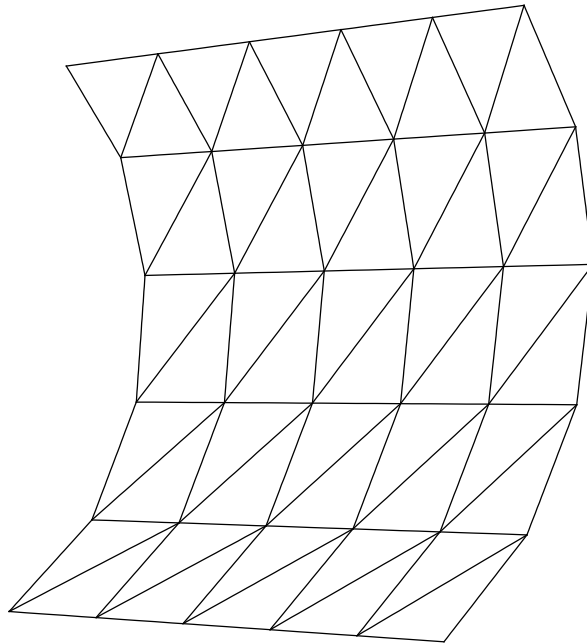
melibatkan sistem persamaan yang rumit dan kurang sesuai digunakan secara praktikal (Li *et al.*, 2013).

Berlainan dengan pendekatan Aumann (1991), Bodduluri dan Ravani (1993) menggunakan konsep keduaan di antara titik dan satah pada ruang unjuran untuk membina permukaan boleh berbentang. Pendekatan ini menganggap bahawa sesuatu permukaan adalah terdiri daripada lengkung-lengkung yang terletak pada ruang unjuran secara duaan dalam geometri satah.

Dengan berdasarkan kajian Bodduluri dan Ravani (1993), Pottmann dan Farin (1995) mempermudah langkah-langkah yang diperlukan untuk membina sesuatu permukaan Bézier nisbah boleh berbentang. Selain itu, Pottmann dan Wallner (1999) menggunakan teknik tersebut untuk menghampiri sesuatu permukaan boleh berbentang. Penggunaan lanjut terhadap konsep keduaan boleh diperoleh dalam Yang *et al.* (2007), di mana bentuk bagi sesuatu permukaan boleh berbentang boleh dilaraskan mengikut satu parameter kawalan dalam perbincangan tersebut. Mengikut Zhou *et al.* (2013) pula, sesuatu permukaan boleh berbentang dapat direka dengan menggunakan satah-satah kawalan yang terdiri daripada fungsi-fungsi asas C-Bézier. Bentuk bagi sesuatu permukaan boleh berbentang juga boleh dilaraskan dengan menggunakan satu parameter kawalan. Apabila parameter tersebut ditukarkan kepada nilai-nilai yang lain, satu famili permukaan boleh berbentang akan terbentuk tetapi ciri-ciri bagi permukaan Bézier masih dikekalkan.

Secara keseluruhan, pendekatan yang kedua ini membekalkan satu perwakilan yang padat kepada permukaan boleh berbentang dalam bentuk duaan. Namun demikian, keputusan-keputusan yang diperoleh susah digunakan dalam kebanyakan aplikasi yang berkaitan dengan perkilangan dan pemodelan (Chu & Chen, 2004).

Bagi pendekatan yang ketiga pula, satu kaedah penghampiran telah digunakan untuk memetakan permukaan boleh berbentang yang terletak pada ruang tiga dimensi kepada satah (Gan *et al.*, 1994, 1996). Mengikut kaedah tersebut, satu permukaan boleh berbentang boleh dibahagi kepada tampalan-tampalan kecil yang berbentuk segitiga. Sempadan bagi kesemua tampalan tersebut perlu dihitung mengikut syarat-syarat tertentu supaya menjadi garis lurus selepas dipetakan pada satah. Rajah 1.7 memaparkan satu permukaan boleh berbentang pada ruang tiga dimensi dibahagikan kepada tampalan-tampalan kecil mengikut perbincangan tersebut.



Rajah 1.7 Permukaan boleh berbentang dengan tampalan-tampalan berbentuk segitiga

Pendekatan dengan kaedah penghampiran ini banyak dikaji dalam beberapa bidang yang berlainan. Sebagai contoh, Wang *et al.* (2002, 2005) yang membuat penyelidikan terhadap pakaian melanjutkan perbincangan tersebut untuk memetakan sesuatu permukaan yang rumit kepada satah, manakala Frey (2004) pula meneruskan kaedah itu dalam aplikasi pembentukan logam kepingan yang tergolong dalam bidang kejuruteraan. Wang (2008) yang melakukan kajian terhadap pakaian dan kasut menggunakan perwakilan jaringan FL untuk menghampiri sesuatu permukaan sebenar. Permukaan jaringan FL itu memiliki sifat yang serupa dengan permukaan boleh berbentang.

Perkembangan lanjut terhadap kaedah penghampiran ini boleh diperoleh dalam Liu *et al.* (2011), di mana satu pengaturcaraan dinamik telah diperkenalkan untuk menjana

lengkung sempadan bagi permukaan boleh berbentang diskret. Penyelidikan tersebut telah memperkayakan kegunaan permukaan boleh berbentang dalam rekabentuk industri. Selain itu, Zeng *et al.* (2012) yang melakukan penyelidikan terhadap pakaian dan perabot rumah mencadangkan satu penyelesaian kuasa dua terkecil yang berkesan untuk memetakan permukaan jaringan segitiga kepada satah dengan kaedah yang dinamakan sebagai DEGI. Mengikut perbincangan tersebut, sesuatu permukaan yang bukan boleh berbentang perlu dibahagikan kepada tampalan-tampalan kecil yang berbentuk segitiga. Tampalan-tampalan kecil itu kemudian diubahsuai dengan menggunakan kaedah DEGI supaya mengekalkan keselajaran tertentu apabila merentasi sempadan-sempadan sepunya.

Perhatikan bahawa pendekatan ketiga hanya menghampiri suatu permukaan boleh berbentang yang dikaji dengan menggunakan tampalan-tampalan berbentuk segitiga. Untuk meningkatkan kejituan, seseorang pereka perlu membahagikan permukaan tersebut kepada tampalan-tampalan yang lebih kecil. Keadaan ini membayangkan bahawa lebih masa adalah diperlukan dalam proses kiraan bagi meningkatkan kejituan terhadap teknik tersebut. Oleh yang demikian, satu keseimbangan di antara kejituan dan masa kiraan perlu dipertimbangkan oleh pereka sewaktu menggunakan pendekatan ini (Chu & Séquin, 2002).

Ketiga-tiga pendekatan yang dibincangkan setakat ini menggunakan syarat boleh berbentang

$$\left[\frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] \quad \frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] \quad \mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u) \right] = 0$$

secara terus untuk menyekat permukaan yang dilukis merupakan permukaan boleh berbentang. Penggunaan sekatan tersebut menyebabkan beberapa sifat penting yang dapat memudahkan proses penyelesaian tidak ditemui. Oleh itu, berlakulah beberapa masalah yang tidak diingini seperti yang diuraikan dalam situasi masing-masing.

Berasingan dengan tiga pendekatan di atas, Chu dan Séquin (2002) serta Chu dan Chen (2007) memperkenalkan satu kaedah untuk menjana tampalan Bézier boleh berbentang dengan menggunakan algoritma de Casteljaou. Perbincangan mereka yang tidak selesaikan syarat boleh berbentang secara terus sesuai digunakan untuk melukis permukaan boleh berbentang yang terdiri daripada dua lengkung sempadan berbentuk polinomial. Walau bagaimanapun, cara ini juga mendatangkan beberapa kesulitan yang tidak diingini. Perbincangan lanjut terhadap kaedah ini akan dikemukakan dalam bab yang seterusnya.

Tujuan utama penyelidikan yang dijalankan dalam tesis ini adalah meringkaskan hasil kerja-kerja Chu dan Séquin (2002) atau Chu dan Chen (2007) dengan memperkenalkan tampalan bak-Bézier boleh berbentang. Penggunaan tampalan baru ini telah berjaya menyelesaikan beberapa masalah yang dihadapi sebelum ini. Di samping itu, tampalan baru ini juga memberi pilihan tambahan kepada para pereka yang ingin menyelesaikan pelbagai situasi yang ditemui dalam rekabentuk geometri.

1.7 SUSUNAN TESIS

Penyelidikan yang dilakukan dalam tesis ini dibahagikan kepada dua fasa. Fasa yang pertama mencadangkan tampalan bak-Bézier boleh berbentang sebagai pilihan baru untuk rekabentuk permukaan boleh berbentang. Perbincangan tersebut meliputi Bab 2 sehingga Bab 5. Bagi fasa yang kedua pula, satu teknik diperkenalkan untuk memetakan tampalan bak-Bézier boleh berbentang yang terletak pada ruang tiga dimensi kepada satah. Perbincangan tersebut disampaikan dalam Bab 6.

Penerangan berikut menghuraikan secara ringkas susunan perbincangan yang dilakukan sepanjang tesis ini.

Bab 2 akan melanjutkan perbincangan terhadap tampalan Bézier boleh berbentang. Dua jenis kaedah telah dikemukakan untuk menjana tampalan tersebut, diikuti kesulitan-kesulitan yang timbul sebagai hasil sampingan yang tidak diingini akan dibincangkan dalam bab ini.

Seterusnya, Bab 3 memperkenalkan lengkung yang serupa lengkung Bézier untuk membentuk tampalan bak-Bézier boleh berbentang. Satu kaedah tambahan yang digunakan untuk menjana tampalan boleh berbentang turut dibincangkan dalam bab ini.

Dengan bantuan Bab 3, Bab 4 melanjutkan kajian terhadap tampalan bak-Bézier boleh berbentang dengan menggabungkan dua atau berlebihan tampalan mengikut syarat keselajaran tertentu.

Dalam Bab 5 pula, kualiti berkenaan sesuatu gabungan permukaan yang dilakukan dalam Bab 4 akan disemak dan dinilai berdasarkan situasi masing-masing.

Selepas itu, satu percubaan untuk memetakan permukaan bak-Bézier boleh berbentang pada ruang tiga dimensi kepada satah dilaksanakan dalam Bab 6. Penghuraian terhadap cara pemetaan tersebut memerlukan keputusan-keputusan yang diperolehi sebelum bab ini.

Akhir sekali, satu perbincangan yang merupakan rumusan terhadap penyelidikan ini dilakukan dalam Bab 7, dan diikuti dengan kesimpulan ringkas sebagai penutup kepada tesis ini.

BAB 2

TAMPALAN BÉZIER BOLEH BERBENTANG

2.1 PENGENALAN

Dalam bab ini, algoritma de Casteljau akan digunakan untuk membentuk tampalan boleh berbentang yang terdiri daripada dua lengkung Bézier sebagai lengkung sempadan. Seterusnya, dua kaedah dikemukakan untuk menjana tampalan tersebut, yang dinamakan sebagai tampalan Bézier boleh berbentang, mengikut situasi masing-masing. Walaupun kebanyakan perbincangan di sini boleh ditemui dalam Chu dan Séquin (2002) atau Chu dan Chen (2007), tetapi pendekatan tersebut masih dihuraikan secara lengkap kerana keputusan-keputusan yang diperoleh dalam bab ini akan dibanding dan diringkas dalam bab yang seterusnya.

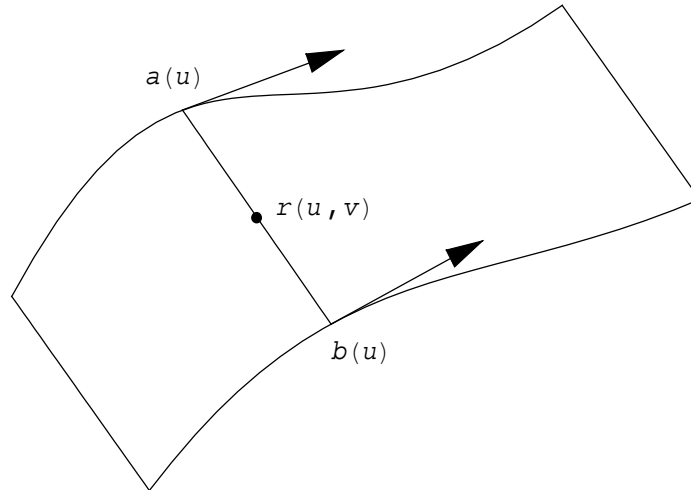
2.2 SYARAT BOLEH BERBENTANG

Bagi memudahkan rujukan, bahagian ini mengulangi syarat boleh berbentang seperti yang disampaikan dalam Teorem 1.1.

Biar dua lengkung sempadan $a(u)$ dan $b(u)$ dipilih secara sebarangan. Suatu permukaan tergaris dapat dibentuk dengan menggabungkan setiap pasangan titik (yang mempunyai nilai u yang sama) dengan satu tembereng garis lurus ab seperti dalam Rajah 2.1. Tembereng garis ab ini diperkenalkan sebagai garisan pada parameter bernilai u . Tampalan permukaan tersebut boleh diungkapkan sebagai

$$\mathbf{r}(u, v) = (1-v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

dengan nilai v merupakan parameter sepanjang setiap garisan.



Rajah 2.1 Satu permukaan tergaris

Secara am, garis tangen pada titik $\mathbf{a}(u)$, garis tangen pada titik $\mathbf{b}(u)$ dan garisan \mathbf{ab} dengan sesuatu nilai u yang sepadan tidak terletak pada satah yang sama. Jika garis-garis tangen $\mathbf{a}(u)$ dan $\mathbf{b}(u)$ adalah sesatah dengan garisan \mathbf{ab} bagi sebarang nilai u , maka permukaan tersebut akan bersifat boleh berbentang. Keadaan sesatah ini boleh diwakilkan sebagai hasil darab skalar trirangkap di antara dua garis tangen dengan vektor garisan $\mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u)$ seperti berikut:

$$\frac{d}{du}[\mathbf{a}(u)] \times \frac{d}{du}[\mathbf{b}(u)] \bullet [\mathbf{b}(u) - \mathbf{a}(u)] = 0. \quad (2.1)$$

2.3 MENAKSIRKAN SYARAT BOLEH BERBENTANG SECARA GEOMETRI

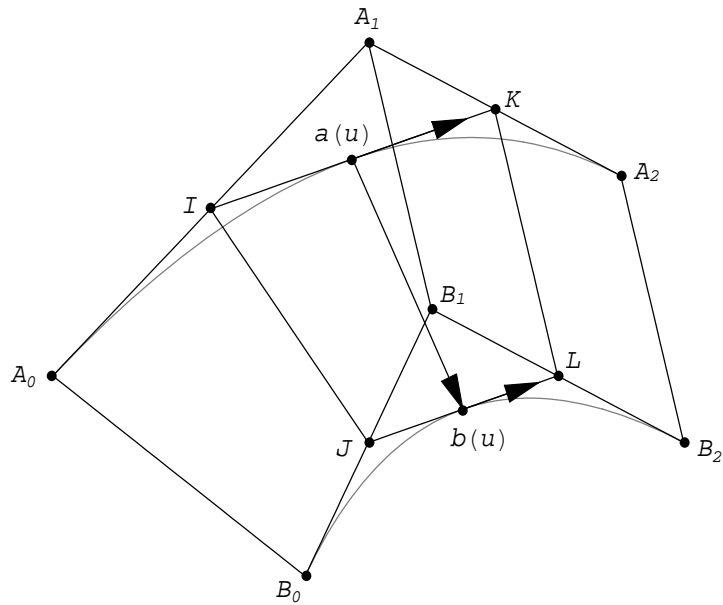
Dua jenis lengkung sempadan, yang masing-masing terdiri daripada tiga dan empat titik kawalan, dibincangkan dalam bahagian ini. Penerangan berikut akan menunjukkan bagaimana memperoleh kekangan-kekangan tertentu dengan menggunakan syarat boleh berbentang yang dicari dalam Bahagian 2.2.

2.3.1 KES 1

Katakan kedua-dua lengkung sempadan masing-masing mempunyai tiga titik kawalan yang berlainan seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.2. Dengan menggunakan kaedah binaan de Casteljaou (Prautzsch *et al.*, 2002), lengkung $\mathbf{a}(u)$ dan lengkung $\mathbf{b}(u)$ yang masing-masing mempunyai titik kawalan $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ dan $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$, dengan $\mathbf{A}_i \neq \mathbf{B}_i$ bagi $i = 0, 1$ dan 2 , boleh diungkapkan dalam bentuk

$$\mathbf{a}(u) = (1-u)\mathbf{I} + u\mathbf{K} = (1-u)[(1-u)\mathbf{A}_0 + u\mathbf{A}_1] + u[(1-u)\mathbf{A}_1 + u\mathbf{A}_2],$$

$$\mathbf{b}(u) = (1-u)\mathbf{J} + u\mathbf{L} = (1-u)[(1-u)\mathbf{B}_0 + u\mathbf{B}_1] + u[(1-u)\mathbf{B}_1 + u\mathbf{B}_2].$$



Rajah 2.2 Dua lengkung sempadan dengan tiga titik kawalan

Perhatikan bahawa tembereng garis IK terletak pada arah tangen $a(u)$ manakala tembereng garis JL terletak pada arah tangen $b(u)$. Syarat boleh berbenteng dalam Bahagian 2.2 membayangkan bahawa I, J, K dan L seharusnya terletak pada satah yang sama. Oleh yang demikian, Persamaan (2.1) boleh ditulis sebagai

$$IK \cdot IJ \times KL = 0. \quad (2.2)$$

Untuk menyelesaikan persamaan ini, biar

$$a_i = A_i - A_{i-1} \text{ bagi } i = 1 \text{ dan } 2,$$

$$c_j = B_j - A_j \text{ bagi } j = 0, 1 \text{ dan } 2$$

seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.3.