UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

JIM 215/JIF 313 – Pengantar Analisis Berangka

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEPULUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan ini.

Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

1. (a) Soalan (i)-(iii) merujuk kepada dua teorem yang berikut:

> TEOREM A
>
> Jika fungsi f selanjar di dalam selang $[a,b]$ dan $f(a)f(b) < 0$, maka f mempunyai sekurang-kurangnya satu punca nyata dalam $[a,b]$.

> TEOREM B
>
> Jika fungsi f selanjar di dalam selang $[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$ dan f' tidak bertukar tanda dalam selang ini, maka f mempunyai punca nyata yang unik dalam $[a,b]$.

(i) Kenapakah fungsi f perlu selanjar di dalam kedua-dua teorem? Berikan lakaran yang sesuai untuk menjelaskan hujah anda.

(ii) Jika syarat $f(a)f(b) < 0$ tidak dipenuhi, maka f tidak akan mempunyai punca di dalam selang $[a,b]$. Sangkalkan dengan suatu lakaran. Adakah ini bercanggah dengan TEOREM A? Kenapa?

(iii) Sekiranya f mempunyai punca yang unik dalam selang $[a,b]$, maka f' tidak berubah tanda. Sangkalkan dengan suatu lakaran. Adakah ini bercanggah dengan TEOREM B? Kenapa?

(30 markah)

(b) Kaedah titik tetap bagi menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$ melibatkan penulisan semula persamaan ini ke dalam bentuk $x = g(x)$. Punca bagi $f(x) = 0$ kemudianya dijanakan dengan menggunakan rumus

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

bermula dengan hampiran awal x_0.

(i) Nyatakan satu kerumitan yang ketara bagi kaedah ini.

(ii) Buktikan bahawa $x_{k+1} = g(x_k)$ menumpu jika $|g(\alpha)| < 1$ dengan α adalah punca yang sebenar.

(iii) Lakarkan perilaku penumpuan atau pencapahan bagi kes-kes $0 < g'(x) < 1$, $-1 < g'(x) < 0$, $g'(x) > 1$ dan $g'(x) < -1$.

(40 markah)

(c) Data yang berikut menunjukkan bilangan penduduk dunia dalam tahun-tahun 1900, 1930, 1960 dan 1990.

Tahun	Bil. penduduk (juta)
1900	1650
1930	2070
1960	3020
1990	5300

Binakan jadual beza bagi data di atas. Seterusnya, dapatkan suatu polinomial berdarjah tiga yang menginterpolasikan data tersebut. Dengan menggunakan polinomial interpolasi ini, anggarkan bilangan penduduk dalam tahun 1970 dan 1996. Bandingkan anggaran anda dengan bilangan penduduk mengikut bancian, iaitu 3,700,000,000 dalam tahun 1970 dan 5,770,000,000 dalam tahun 1996. Berikan komen sepatutnya.

(30 markah)

2. (a) Terangkan cara penghuraian-LU bagi menyelesaikan sistem persamaan linear

$$A\underline{x} = \underline{b}.$$

Di sini A ialah suatu matriks $n \times n$, $\underline{x}$ ialah vektor anu $n \times 1$ dan $\underline{b}$ ialah vektor malar $n \times 1$. Nyatakan perhubungan di antara kaedah penghuraian-LU dengan kaedah penghapusan Gauss.

(30 markah)

(b) Kaedah penghuraian-LU telah digunakan bagi menyelesaikan suatu sistem persamaan 3×3 yang diberi oleh

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 75 \\ 5 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Proses penghuraian-LU menghasilkan

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.02 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } U = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -30 \\ 0 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Tuliskan sistem yang diselesaikan. Dapatkan penyelesaian bagi sistem ini.

(30 markah)

(c) Terangkan konsep suasana tak sihat dengan merujuk kepada dua sistem persamaan linear yang berikut :

$$\begin{bmatrix} 0.89 & 0.54 \\ 0.47 & 0.28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.35 \\ -0.19 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0.9 & 0.54 \\ 0.47 & 0.28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.35 \\ -0.19 \end{bmatrix}.$$

Bagaimanakah anda dapat mengenali suatu sistem itu bersuasana tak sihat tanpa menyelesaikannya? Gunakan sistem yang pertama sebagai contoh.

(40 markah)

3. (a) Keadah lelaran dicadangkan bagi menyelesaikan sistem persamaan linear

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

dengan A sebagai matriks $n \times n$, $\underline{x}$ vektor anu $n \times 1$ dan $\underline{b}$ vektor malar $n \times 1$. Perihalkan kaedah Jacobi dan kaedah Gauss-Seidel bagi tujuan ini. Tunjukkan dengan jelas perbezaan utama kedua-dua kaedah tersebut.

(30 markah)

(b) Jalankan tiga lelaran kaedah Gauss-Seidel bagi menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nyatakan suatu kriteria berhenti bagi menentukan sama ada penyelesaian sistem ini akhirnya menumpu kepada jawapan sebenar atau tidak. Mula dengan tekaan awal $\underline{x}_0 = [1, 1, 1]^T$.

(40 markah)

(c) Bentuk umum bagi suatu kaedah lelaran bagi menyelesaikan $A\underline{x} = \underline{b}$ dengan A sebagai matriks $n \times n$, $\underline{x}$ vektor anu $n \times 1$ dan $\underline{b}$ vektor malar $n \times 1$ diberi oleh

$$\underline{x}^{(k+1)} = M\underline{x}^{(k)} + \underline{c}.$$

Dapatkan bentuk matriks pelelaran M jika kaedah Jacobi digunakan. Kira jejari spektral bagi matriks pelelaran ini bagi menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks pekali

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(30 markah)

4. (a) Melalui penggantian $f\ (x)$ dengan fungsi linear $p_1(x)$ yang menginterpolasikan (x_0, f_0) dan (x_1, f_1), buktikan bahawa kaedah trapezium diberi oleh

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}h(f_0 + f_1)\ ,\quad h = x_1 - x_0.$$

(Pembuktian secara geometri tidak diterima).

Tunjukkan juga yang ralat tempatannya diberi oleh

$$E = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi)\ ,\ \xi \in [0,1].$$

Kaedah trapezium digunakan bagi mengira $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Kira penghampiran ini jika satu selang digunakan. Anggarkan ralatnya.

(40 markah)

(b) Kaedah $\frac{1}{3}$ - Simpson digunakan bagi menilaikan $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Berapakah bilangan subselang yang diperlukan supaya ralatnya kurang daripada 10^{-6}?

(30 markah)

(c) Jadual berikut menunjukkan hampiran bagi nilai $\int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx$ dengan menggunakan 2, 4, 8 dan 16 subselang (ditandakan dengan n) melalui kaedah trapezium gubahan:

n	Hampiran
2	0.53518622
4	0.57788949
8	0.59352511
16	0.59918122

Dengan menggunakan kaedah kamiran Romberg, dapatkan panghampiran kamiran tersebut sehingga $O(h^8)$. Kira peratus ralat jika diketahui

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx = 0.60233736.$$

(30 markah)

5. (a) Gunakan teorem Gerschgorin untuk mendapatkan cakera-cakera yang mengandungi nilai-nilai eigen bagi matriks

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(30 markah)

(b) Tuliskan suatu algoritma bagi mengira nilai eigen dominan bagi sebarang matriks segiempat tepat. Algoritma yang anda bina hendaklah dengan jelas menunjukkan syarat-syarat yang dikenakan ke atas matriks ini, usaha mengelakkan daripada limpahan pengiraan dan kriteria berhenti.

(30 markah)

(c) Dapatkan nilai eigen dominan sehingga 5 tempat perpuluhan bagi matriks

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan kaedah kuasa sebanyak tiga kali. Mulakan dengan tekaan awal $\underset{\sim}{x}_0 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

(40 markah)

Rumus-Rumus Penting

Persamaan Tak Linear

1. $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

2. $$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Sistem Persamaan Linear

3. $$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|} \le \frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|}$$

4. $$\frac{\|\underline{x} - \bar{\underline{x}}\|}{\|\bar{\underline{x}}\|} \le k(A)\frac{\|E\|}{\|A\|}$$

5. $$\frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \le k(A)\frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

6. $M_J = -D^{-1}(L + U)$

7. $M_G = -(D + L)^{-1}U$

8. $M_S = -(D + \omega L)^{-1}\{(\omega - 1)D + \omega U\}$

9. $$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(M_G)}}$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(M_J)]^2}}$$

Interpolasi Polinomial

10. $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x)$, $L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$

11. $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_o)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

12. $P_n(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{q(q-1) \cdots (q-n+1)}{n!} \Delta^m f_0$.

13. $R_n(x) = \frac{q(q-1)(q-2) \cdots (q-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$

14. $P_n(x) = f_0 + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \cdots + \frac{q(q+1)(q+2) \cdots (q+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n}$

atau

$$P_n(x) = f_n + q\nabla f_n + \frac{q(q+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \cdots + \frac{q(q+1) \cdots (q+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$$

15. $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

16. $P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$

$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

17. $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \; f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]$

Pembezaan Berangka

18. $$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 f_0 + \ldots\right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (q-1)\Delta^3 f_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 f_0 + \ldots\right]$$

19. $$R_n'(x) = h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)\left[\frac{d}{dq}\binom{q}{n+1}\right]\frac{1}{h} + \binom{q}{n+1} h^{n+1}\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi).$$

Jika $q = 0$,

$$R_n'(x) \simeq \frac{(-1)^n}{h}\frac{\Delta^{n+1} f_0}{n+1}$$

20. $$F[h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f'(x_0) \simeq F[h_0]$$

$$f'(x_0) \simeq F_1\left[\frac{h_0}{2}\right] = \frac{2^2 F\left[\frac{h_0}{2}\right] - F[h_0]}{2^2 - 1}$$

$$f'(x_0) \simeq F_2\left[\frac{h_0}{4}\right] = \frac{2^4 F_1\left[\frac{h_0}{4}\right] - F_1\left[\frac{h_0}{2}\right]}{2^4 - 1}$$

$$f'(x_0) \simeq F_3\left[\frac{h_0}{8}\right] = \frac{2^6 F_2\left[\frac{h_0}{8}\right] - F_2\left[\frac{h_0}{4}\right]}{2^6 - 1}$$

Pengkamiran Berangka

21. $$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$\text{Ralat sejagat} = -\frac{1}{12}(b-a)\, h^2 f''(\xi)$$

22. $\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{3}h\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$

Ralat sejagat $= -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$.

23. $\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{3}{8}h\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \ldots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} +\right.$

Ralat sejagat $= -\frac{1}{80}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$.

24. $I \simeq T[h_0] = \frac{1}{2}h_0\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$

$$I \simeq T_1\left[\frac{h_0}{2}\right] = \frac{2^2 T\left[\frac{h_0}{2}\right] - T[h_0]}{2^2 - 1}$$

$$I \simeq T_2\left[\frac{h_0}{4}\right] = \frac{2^4 T_1\left[\frac{h_0}{4}\right] - T_1\left[\frac{h_0}{2}\right]}{2^4 - 1}$$

$$I \simeq T_3\left[\frac{h_0}{8}\right] = \frac{2^6 T_2\left[\frac{h_0}{8}\right] - T_2\left[\frac{h_0}{4}\right]}{2^6 - 1}$$

- ooo 0 ooo -