
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

JIM 211/4 – Kalkulus Lanjutan

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ ditakrifkan seperti berikut:

$$\begin{aligned}u^2 + 2x - v^2 &= 0 \\ uv - y &= 0.\end{aligned}$$

(i) Dapatkan $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial x}$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(3v^2 - u^2)}{(u^2 + v^2)^3}$.

(35 markah)

- (b) Kelaskan titik genting bagi fungsi

$$f(x, y) = -2x^2 + 8x - 3y^2 + 24y + 7.$$

Seterusnya, cari nilai ekstremum tempatannya jika wujud.

(35 markah)

- (c) Sebuah syarikat perindustrian mengeluarkan dua jenis enjin x dan y . fungsi gabungan pengeluarannya diwakili oleh

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 6y.$$

Untuk memaksimumkan pengeluaran, berapa banyakkah enjin jenis x dan jenis y yang patut dikeluarkan sekiranya sejumlah 42 enjin (iaitu $x + y = 42$) diperlukan? Kira jumlah pengeluaran enjin tersebut.

(Panduan: Gunakan kaedah Pendarab Lagrange).

(30 markah)

2. (a) (i) Selesaikan $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$.
- (ii) Lakarkan rantau A yang dibatasi oleh garis-garis $x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$, $x + y = 4$ dan $x + y = 1$. Seterusnya, dengan menggunakan penukaran pembolehubah yang sesuai, selesaikan

$$\iint_A 3xy \, dx \, dy.$$

(50 markah)

- (b) (i) Cari nilai $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{1-z} y \, dx \, dy \, dz$.

- (ii) Lakarkan bongkah bagi

$$S = \left\{ (z, y, x) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2}, 0 \leq y \leq 3-x, -3 \leq x \leq 3 \right\}.$$

Kemudian, cari nilai

$$\iiint_S (xz + 3z) \, dx \, dy \, dz.$$

(50 markah)

3. (a) Terangkan dengan memberi contoh yang sesuai, apakah yang dimaksudkan dengan “jujukan menokok” dan “jujukan terbatas”. Seterusnya, tentukan sama ada jujukan-jujukan berikut menokok atau terbatas.

(i) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$.

(ii) $\left\{ \frac{2^n}{n} \right\}$.

(50 markah)

(b) Berikan takrif bagi setiap yang berikut:

- (i) penumpuan bagi suatu jujukan.
- (ii) jujukan Cauchy.

Seterusnya, tunjukkan bahawa jujukan yang menumpu memuaskan kriteriaum Cauchy.

(50 markah)

4. (a) Dengan menggunakan ujian yang sesuai. Tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu atau mencapah.

(i)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{1/4}}$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{9^k(k+1)}$$

(iii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{k!}$$

(30 markah)

(b) Cari siri kuasa bagi $(1 + x^2)^{-1}$. Seterusnya, dapatkan siri kuasa bagi $\tan^{-1}x$.
Dengan ini, tunjukkan bahawa

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(40 markah)

- (c) Cari jejari penumpuan bagi siri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n \cdot n^2}.$$

Seterusnya, tentukan selang bagi x supaya siri tersebut menumpu.

(30 markah)

5. (a) Cari polinomial Taylor $P_4(x)$ dan baki $R_5(x)$ (bentuk Lagrange) dalam kuasa $x - a$ bagi fungsi

$$f(x) = x \sin 2x, \quad a = \pi/3.$$

(40 markah)

- (b) Diberi jujukan

$$f_n(x) = \frac{nx^n}{1 + nx^n}.$$

- (i) Dapatkan $f(x)$.
- (ii) Cari $\sup_{0 \leq x \leq 2} |f_n(x) - f(x)|$.
- (iii) Tunjukkan bahawa jujukan itu tidak menumpu secara seragam dalam selang $[0, 2]$.
- (iv) Adakah jujukan itu menumpu secara seragam dalam selang $[0, 1]$?

(60 markah)

Lampiran

1. (a) $\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

(b) $F(x, y, u, v) = 0$

$$G(x, y, u, v) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial(F, G) / \partial(x, v)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)}$$

(c) $x = r \cos \theta$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

(d) $x = \rho \sin \phi \cos \theta$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

(e) $M = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$