
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

JIM 201/4 – Aljabar Linear

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan dipenghujung subsoalan itu.

1. (a) Diberi set semesta $\varepsilon = \{x : x \text{ ialah } 20 \text{ integer positif yang pertama}\}$.

Jika $P = \{x : x \text{ ialah nombor gandaan } 3\}$.

$Q = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$.

$R = \{x : x \text{ ialah faktor bagi } 36\}$.

Senaraikan unsur-unsur bagi set yang berikut:

- (i) $P \cap Q \cap R$.
- (ii) $(P' \cap R) \cap Q'$.
- (iii) $(P \cup \phi) \cup (R \cap \varepsilon)$.
- (iv) $(P \cup Q)' \cap (Q \cup R)'$.

(40 markah)

- (b) Diberi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$. Cari

- (i) $A + B$.
- (ii) AB .
- (iii) A^2 dan A^3 .
- (iv) Deduksikan matriks A^n .

(30 markah)

- (c) Diberi

$$x - 3ay = 3$$

$$ax - (2 - a)y = 2$$

dengan a adalah pemalar.

Tentukan nilai-nilai a jika sistem persamaan ini

- (i) tidak konsisten.
- (ii) mempunyai penyelesaian unik.
- (iii) mempunyai bilangan penyelesaian yang tidak terhingga.

(30 markah)

2. (a) Tentukan sama ada set berikut dengan operasi biasa adalah ruang vektor atau tidak:

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 1 \right\}$.

(iv) $\{A \mid A \in M_{n \times n} \text{ dan } A \text{ tak singular}\}$.

(v) $\{X \mid AX = \lambda X, A \in M_{n \times n}\}$.

(25 markah)

- (b) Tentukan sama ada set vektor berikut bersandar linear atau tidak:

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(20 markah)

- (c) Katakan U dan W adalah subruang daripada ruang V , buktikan bahawa

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

(25 markah)

(d) Diberi $U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

dan $W = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Cari $\dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.

(30 markah)

3. (a) Cari songsangan bagi matriks $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Selesaikan sistem persamaan

$$8x + 5y + 3z = 4$$

$$5x + 3y + z = 5$$

$$3x + 2y + z = 7.$$

(30 markah)

(b) Diberi M ialah matriks $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2k & 1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$.

(i) Cari dua nilai k jika M adalah singular.

(ii) Selesaikan persamaan $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$ jika $k = 2$ dan juga tentukan

sama ada penyelesaiannya wujud bagi setiap nilai k yang telah dicari dalam bahagian (i).

(50 markah)

(c) Dengan menggunakan petua Cramer, selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$x - y + z = -1$$

$$2x + y - 3z = 8$$

$$x - 2y + 3z = -5.$$

(20 markah)

4. (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Carikan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen bagi A .

Seterusnya, dapatkan

(i) matriks-matriks R dan D jika $R^{-1}AR = D$.

(ii) penyelesaian am bagi $\dot{X} = AX$.

(80 markah)

(b) Tentukan sama ada fungsi-fungsi berikut ialah transformasi linear atau tidak:

(i) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dan $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dan $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$.

(iii) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dan $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x-2y \\ x+4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(iv) $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ dan $T(A) = A^2$.

(20 markah)

5. (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah suatu transformasi linear yang ditakrifkan oleh

$$T \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} y \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{pmatrix}$$

dengan asas-asas $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dan $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Dapatkan

(i) $A = [T]_{B_1, B_2}$.

(ii) $T \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right]$ dengan menggunakan A.

(iii) $C = [T]_{C_1, C_2}$ jika C_1 dan C_2 adalah asas semulajadi bagi \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3 masing-masing.

(iv) $T \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$ dengan menggunakan C.

(70 markah)

(b) Diberi $a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $c = \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \end{pmatrix}$. Cari

- (i) vektor unit yang selari dengan a.
- (ii) nilai bagi pemalar m dan n supaya $ma + nb = c$.

Nilaikan hasil darab skalar bagi a dan b. Seterusnya, cari kosinus bagi sudut di antara a dan b.

(30 markah)