

SULIT



Second Semester Examination
2017/2018 Academic Session

May / June 2018

**MSS418 - Discrete Mathematics
(*Matematik Diskret*)**

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **THIRTEEN (13)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA BELAS (13)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions : Answer **all seven (7)** questions.

[Arahan : Jawab **semua tujuh (7)** soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

...2/-

SULIT

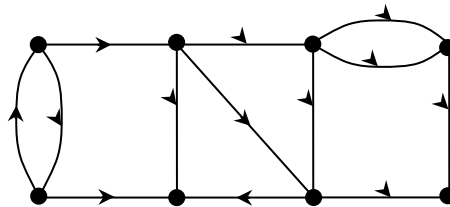
Question 1

(a) Give an example of each of the following graphs:

- (i) pseudograph
- (ii) directed multigraph
- (iii) complete bipartite graph
- (iv) mixed graph

[10 marks]

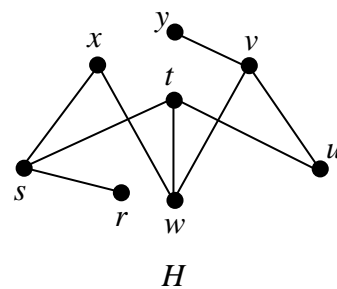
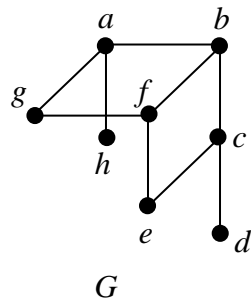
(b) (i) Determine whether the following is a strongly connected graph. (Include the graph with labels in your answer.)



(ii) Prove that in a simple graph with at least two vertices there must be two vertices that have the same degree. [Hint: Consider the case of odd number of vertices and the case of even number of vertices separately.]

[20 marks]

(c) (i) Determine whether the graphs G and H below are isomorphic. If they are, redraw H , keeping the same label to look like G . If they are not, explain why.



...3/-

- (ii) Below is the adjacency matrix of a graph G . Show that there exists a path of length 2 for every pair of vertices of G .

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[20 marks]

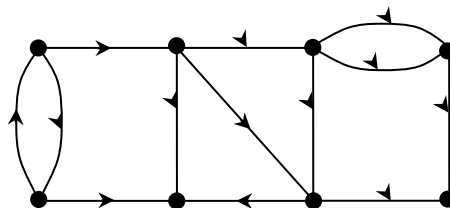
Soalan 1

- (a) Beri satu contoh untuk setiap graf berikut:

- (i) graf semu
- (ii) graf ganda berarah
- (iii) graf dwibahagian lengkap
- (iv) graf campuran

[10 markah]

- (b) (i) Tentukan sama ada yang berikut adalah graf terhubung kuat. (Sertakan graf berikut dengan label dalam jawapan anda.)

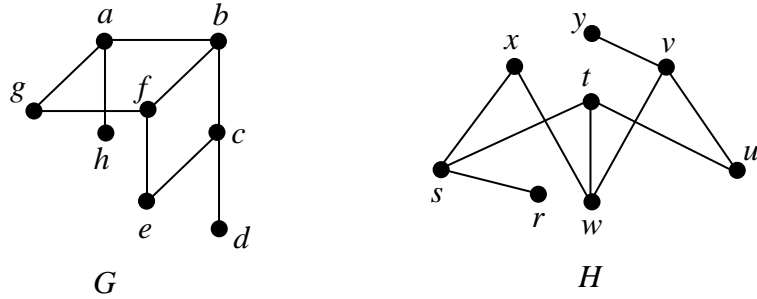


- (ii) Buktikan bahawa dalam suatu graf ringkas yang mempunyai sekurang-kurangnya dua bucu terdapat dua bucu berdarjah sama. [Petunjuk: Pertimbangkan kes bilangan bucu yang ganjil dan kes bilangan bucu yang genap secara berasingan.]

[20 markah]

...4/-

- (c) (i) Tentukan sama ada graf G dan H di bawah adalah berisomorfik. Jika berisomorfik, lukis semula H , dengan mengekalkan label yang sama untuk kelihatan seperti G . Jika tidak, terangkan mengapa.



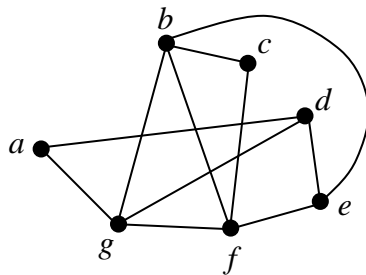
- (ii) Di bawah adalah matriks kesebelahan bagi suatu graf G . Tunjukkan bahawa terdapat lintasan yang panjangnya 2 untuk setiap pasangan bucu G .

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[20 markah]

Question 2

- (a)

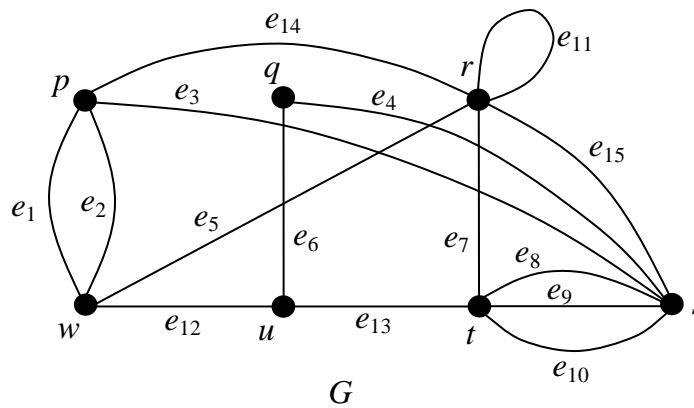


- (i) Determine whether Dirac's theorem or Ore's theorem can deduce that the above graph has a Hamilton circuit. Explain.
- (ii) Find a Hamilton circuit if it exists. If it does not, explain why.

[20 marks]

...5/-

(b)



- (i) Draw the subgraph $H = (V, E)$, where $V = \{w, p, s, t, u\}$ and $E = \{e_1, e_3, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$, or explain why no such subgraph exist.
- (ii) Does G have an Euler circuit? Explain. If it exists, find one.
- (iii) Does G have an Euler path which is not an Euler circuit? Explain. If it exists, find one.

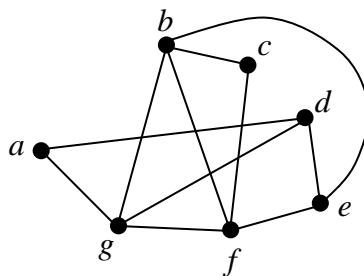
[20 marks]

(c) Give an example of a graph with six or more vertices that has an Euler circuit and a Hamilton circuit that are not the same.

[10 marks]

Soalan 2

(a)

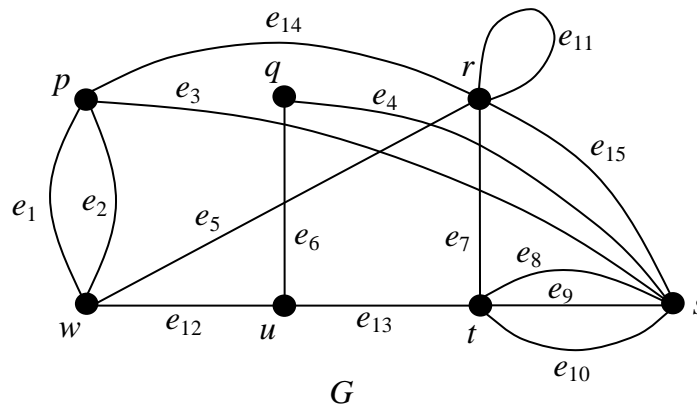


- (i) Tentukan sama ada teorem Dirac atau teorem Ore boleh mendeduksikan bahawa graf di atas mempunyai litar Hamilton. Jelaskan.
- (ii) Cari satu litar Hamilton sekiranya wujud. Jika tidak, terangkan mengapa.

[20 markah]

...6/-

(b)



- (i) Lukis subgraf $H = (V, E)$, yang mana $V = \{w, p, s, t, u\}$ dan $E = \{e_1, e_3, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$, atau jelaskan mengapa subgraf sebegini tidak wujud.
- (ii) Adakah G mempunyai litar Euler? Jelaskan. Jika ianya wujud, cari satu.
- (iii) Adakah G mempunyai lintasan Euler yang bukan litar Euler? Jelaskan. Jika ianya wujud, cari satu.

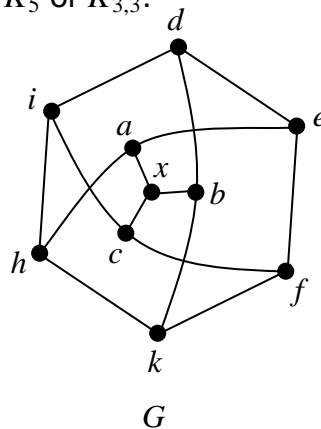
[20 markah]

(c) Beri satu contoh graf dengan enam bucu atau lebih yang mempunyai litar Euler dan litar Hamilton yang tak sama.

[10 markah]

Question 3

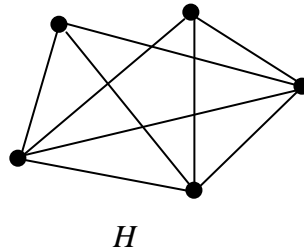
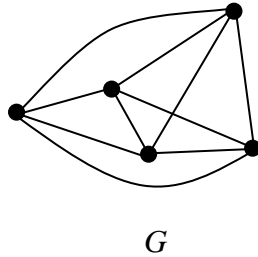
(a) Determine whether the graph G below is planar. If it is planar, draw a planar representation of G . If it is nonplanar, find a subgraph of G homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$.



[10 marks]

...7/-

- (b) Buktikan bahawa graf G dan H di bawah adalah tak berisomorfik dengan menunjukkan bahawa satu graf adalah planar dan satu lagi bukan planar.



[20 markah]

- (c) Lima pengkritik filem ditugaskan menonton dan mengulas tujuh dokumentari pendek (dilabelkan A hingga G) yang akan dipaparkan di lokasi teater yang sama. Dokumentari yang perlu diulas oleh para pengkritik tersebut adalah:

- 1 \Rightarrow A, B, D
- 2 \Rightarrow B, C, F
- 3 \Rightarrow A, B, D, G
- 4 \Rightarrow E, G
- 5 \Rightarrow D, E, F

Setiap pengkritik filem perlu menonton setiap dokumentari yang ditugaskan selama 1 jam. Berapakah bilangan minimum slot masa yang mesti digunakan untuk menjadualkan semua penayangan satu jam supaya tiada pengkritik yang mempunyai konflik?

[20 markah]

Question 4

- (a) A family of ten members must be seated at two round tables in a restaurant. The family consists of the grandparents, the parents, three boys and three girls. How many ways to place them if:
- (i) the grandparents and parents must be seated at one table while the boys and the girls are seated alternately at the other table.
 - (ii) the grandparents are seated beside each other at one table with the boys while the parents are seated with the girls at the other table.

[20 marks]

...9/-

- (b) (i) Use the binomial theorem to find the third term in the expansion of $(2x-3)^9$.
- (ii) Use Pascal's triangle to determine the expansion of $\left(x + \frac{1}{2}\right)^5$.

[10 marks]

- (c) In a wedding ceremony, each of the 6 bridesmaids will receive a bouquet of identical flowers with the following request by the bride: bridesmaid 1 will receive an odd number of flowers, bridesmaid 2 will receive at least 2, bridesmaid 3 will not receive more than 15, bridesmaid 4 will receive flowers in multiples of 3 or none at all and the other two bridesmaids may or may not receive any. Disregarding the order of the flowers in any bouquet, write a generating function (do not expand it) for the number of ways n identical flowers could be distributed.

[20 marks]

Soalan 4

- (a) *Satu keluarga dengan sepuluh ahli perlu ditempatkan di dua buah meja bulat dalam sebuah restoran. Keluarga tersebut terdiri daripada datuk dan nenek, ibu dan bapa, tiga budak lelaki dan tiga budak perempuan. Berapakah cara untuk menempatkan mereka sekiranya:*
- (i) *datuk dan nenek serta ibu dan bapa perlu ditempatkan di sebuah meja manakala budak lelaki serta budak perempuan ditempatkan secara berselang di meja yang satu lagi.*
- (ii) *datuk dan nenek ditempatkan bersebelahan bersama-sama budak lelaki di satu meja manakala ibu dan bapa ditempatkan bersama-sama budak perempuan di meja yang satu lagi.*

[20 markah]

- (b) (i) Guna teorem binomial untuk mencari sebutan ketiga dalam kembangan $(2x-3)^9$.
- (ii) Guna segitiga Pascal untuk menentukan kembangan $\left(x + \frac{1}{2}\right)^5$.

[10 markah]

...10/-

SULIT

- (c) *Dalam satu majlis perkahwinan, setiap seorang daripada 6 pengapit perempuan akan menerima sejambak bunga seiras dengan permintaan pengantin perempuan seperti berikut: pengapit 1 menerima bunga dengan bilangan ganjil, pengapit 2 menerima sekurang-kurangnya 2 bunga, pengapit 3 tidak menerima lebih daripada 15 bunga, pengapit 4 akan menerima bilangan bunga dalam gandaan 3 atau tiada sama sekali dan dua pengapit lain mungkin menerima bunga atau tidak menerima bunga. Tanpa menghiraukan susunan bunga dalam mana-mana jambak, tulis satu fungsi penjana (jangan kembangkan) bagi bilangan cara n bunga seiras boleh diagihkan.*

[20 markah]

Question 5

- (a) Determine the number of distinguishable permutations of the letters in the word ANNYEONGHIJOO MOOSEYO when the vowels are together at the beginning or at the end. (You can leave the final answer in a factorial notation).

[10 marks]

- (b) (i) An ice-cream shop offers ten flavours of ice-cream. Suppose a teacher wants to buy 30 cones of ice-cream for her students. Assuming that the amount of ice-cream is sufficient, how many ways can she do this if she wants at least two ice-cream cones of each flavour?
- (ii) How many selections of more than 2 marbles are there from a box of 75 different marbles?

[20 marks]

- (c) In a certain country, a bus driver pays all tolls using 5-cent and 10-cent coins by throwing one coin at a time into the mechanical toll collector.

- (i) Find a recurrence relation for the number of different ways the bus driver can pay a toll of $5n$ cents (where the order in which the coins are thrown matters).
- (ii) In how many different ways can the driver pay a toll of 45 cents?

[20 marks]

...11/-

Soalan 5

- (a) Tentukan bilangan pilihatur berbeza bagi huruf dalam perkataan ANNYEONGHIJOOMOOSEYO apabila vokal bersatu pada permulaan atau pada akhir. (Anda boleh meninggalkan jawapan terakhir dalam sebutan faktorial).
[10 markah]
- (b) (i) Sebuah kedai aiskrim menawarkan sepuluh perisa aiskrim. Katakanlah seorang guru mahu membeli 30 kon ais krim untuk pelajarannya. Dengan mengandaikan bahawa jumlah ais krim mencukupi, berapa cara dia boleh melakukan ini jika dia mahu sekurang-kurangnya dua kon ais krim untuk setiap perisa?
(ii) Berapakah pilihan lebih daripada 2 guli yang terdapat daripada kotak yang mengandungi 75 guli yang berbeza?
[20 markah]
- (c) Dalam sebuah negara, seorang pemandu bas membayar semua tol menggunakan syiling 5 sen dan 10 sen dengan membaling syiling satu persatu ke dalam pengutip tol mekanikal.
(i) Cari hubungan jadi semula untuk bilangan cara yang berbeza pemandu bas tersebut boleh membayar tol sejumlah $5n$ sen (yang mana aturan duit syiling dibaling perlu diambil kira).
(ii) Berapakah cara pemandu tersebut boleh membayar tol sejumlah 45 sen?
[20 markah]

Question 6

- (a) (i) A club has 25 members. How many ways are there to choose a president, vice-president, secretary and treasurer of the club where no person can hold more than one post?
(ii) Explain how to determine the number of ways to select five students out of ten students in relation to selecting four and five students out of nine students.
[10 marks]
- (b) How many integers in the set $\{1,2,3,\dots,360\}$ have at least one prime divisor in common with 360?
[20 marks]

...12/-

SULIT

- (c) One hundred tickets numbered 1, 2, 3, ..., 100 are sold to 100 different people for a drawing. Four different prizes are awarded, including a grand prize (a trip to Tahiti). How many ways are there to award the prize if:
- the people holding tickets 19 and 47 both win prizes.
 - four winners are chosen but none of them receive the correct prizes.
- [20 marks]

Soalan 6

- (a) (i) Suatu kelab mempunyai 25 ahli. Berapakah cara yang ada untuk memilih presiden, naib presiden, setiausaha dan bendahari kelab yang mana tidak seorang pun boleh memegang lebih daripada satu jawatan?
- (ii) Jelaskan bagaimana menentukan bilangan cara untuk memilih lima pelajar dari sepuluh pelajar berhubung dengan memilih empat dan lima pelajar dari sembilan pelajar.
- [10 markah]
- (b) Berapakah bilangan integer dalam set $\{1,2,3,\dots,360\}$ mempunyai sekurang-kurangnya satu pembahagi perdana yang sama dengan 360?
- [20 markah]
- (c) Seratus tiket bernombor 1, 2, 3, ..., 100 dijual kepada 100 orang yang berlainan untuk cabutan. Empat hadiah berbeza diberi, termasuk hadiah utama (perjalanan ke Tahiti). Berapakah cara untuk memberi hadiah jika:
- orang yang memegang tiket 19 dan 47 kedua-duanya memenangi hadiah.
 - empat pemenang dipilih tetapi tidak seorang pun yang menerima hadiah yang betul.
- [20 markah]

Question 7

- (a) Determine the coefficient of the term that contains $x^2y^3z^2w^5$ in the expansion of $(x + 2y - 3z + 2w)^{12}$.
- [10 marks]
- (b) Use the pigeonhole principle to prove that if any 14 integers from 1 to 25 are chosen then one of them is a multiple of another.
- [20 marks]

...13/-

SULIT

- (c) A deposit of RM1000 is made to an investment fund at the beginning of a year. On the last day of each year, 3 percent of the amount in the account is awarded as dividend. However, the bank also deducts RM15 in charges at the end of every year.
- (i) If A_n is the value of the investment at the end of n years, write down a recurrence relation and initial condition for A_n .
- (ii) Use the recurrence relation in (i) to calculate the value of the investment at the end of the third year.

[20 marks]

Soalan 7

- (a) Tentukan koefisien bagi sebutan yang mengandungi $x^2y^3z^2w^5$ dalam kembangan bagi $(x + 2y - 3z + 2w)^{12}$.
- (b) Guna prinsip sarang merpati untuk membuktikan bahawa jika mana-mana 14 integer dari 1 hingga 25 dipilih maka salah satu daripada integer tersebut ialah gandaan satu integer yang lain.
- (c) Satu deposit RM1000 dibuat ke atas suatu dana pelaburan pada awal tahun. Pada hari terakhir setiap tahun, 3 peratus daripada jumlah dalam akaun diberikan sebagai dividen. Bagaimanapun, bank juga memotong RM15 sebagai caj pada akhir setiap tahun.
- (i) Jika A_n adalah nilai pelaburan pada akhir tahun n , tuliskan hubungan jadi semula dan keadaan awal untuk A_n .
- (ii) Guna hubungan jadi semula dalam (i) untuk mentaksir nilai pelaburan pada akhir tahun ketiga.

[10 markah]

[20 markah]

[20 markah]