Second Semester Examination
2017/2018 Academic Session

May / June 2018

MSS416 - Rings And Fields
(Gelanggang dan Medan)

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **FIVE (5)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA (5)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions : Answer **all seven (7)** questions.

*[**Arahan :** Jawab **semua tujuh (7)** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

Question 1

For each of the following statement, prove the statement if it is true otherwise give a counter example if it is false.

(a) The ring $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_4$.

[3 marks]

(b) Every noncommutative ring is infinite.

[3 marks]

(c) There is a subring of $\mathbb{Z}_6$ which is a field.

[3 marks]

(d) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ is a field.

[3 marks]

(e) Every field has non-trivial extensions.

[4 marks]

Soalan 1

Bagi setiap pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh lawan jika palsu.

(a) Gelanggang $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *adalah isomorfik dengan* $\mathbb{Z}_4$.

[3 markah]

(b) Setiap gelanggang tak tukar tertib adalah bersaiz tak terhingga.

[3 markah]

(c) Wujud satu subgelanggang $\mathbb{Z}_6$ *yang juga merupakan suatu medan.*

[3 markah]

(d) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *adalah satu medan.*

[3 markah]

(e) Setiap medan mempunyai medan peluasan yang tak remeh.

[4 markah]

Question 2

Let R be a finite commutative ring with 1. Prove that every nonzero element of R is either a unit or a zero divisor.

[6 marks]

Soalan 2

Biar R suatu gelanggang tukar tertib terhingga dengan 1. Buktikan bahawa setiap unsur bukan sifar bagi R adalah suatu unit atau suatu pembahagi sifar.

[6 markah]

Question 3

Let $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

(a) Show that R is a subring of the ring of 2×2 matrices with the usual matrices addition and multiplication.

[3 marks]

(b) Is R an ideal of the ring of 2×2 matrices?

[2 marks]

(c) Show that R is isomorphic to $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{ a + b\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

[5 marks]

Soalan 3

Biar $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

(a) Tunjukkan bahawa R adalah suatu subgelanggang bagi gelanggang matriks 2×2 *dengan penambahan dan pandaraban biasa matriks.*

[3 markah]

(b) Adakah R ialah suatu unggulan bagi gelanggang matriks 2×2 *?*

[2 markah]

(c) Tunjukkan bahawa R adalah berisomorfik dengan $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{ a + b\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

[5 markah]

Question 4

Let K be a field and u is a root of a polynomial over K. Prove that if $[K(u) : K]$ is odd, then $K(u) = K(u^2)$.

[6 marks]

Soalan 4

Biar K suatu medan dan u adalah satu punca kepada suatu polinomial atas K. Buktikan bahawa jika [K(u) : K] adalah ganjil, maka $K(u) = K(u^2)$.

[6 markah]

Question 5

Show that the fields □ $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ and □ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ are equal. Then find an irreducible polynomial of $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ over □ .

[8 marks]

Soalan 5

Tunjukkan bahawa medan-medan □ $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ *dan* □ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ *adalah sama. Seterusnya dapatkan suatu polinomial tak terturunkan bagi* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *atas* □ .

[8 markah]

Question 6

Find the splitting field of $f(x) = \left(x^2-4\right)\left(x^2-5\right)$.

[6 marks]

Soalan 6

Dapatkan medan terpisahkan bagi $f(x) = \left(x^2-4\right)\left(x^2-5\right)$.

[6 markah]

Question 7

The following is the definition of an idempotent in a ring R:

Let R be a ring and r is an element in R. Then r is called an idempotent of R if $r^2 = r$.

(a) Construct an example of a ring R that has at least two idempotent elements. Justify your answer.

[4 marks]

(b) Show that all idempotents in a ring R are zero divisors of R.

[2 marks]

(c) Show that 1-a is also an idempotent in a ring R if R is a commutative ring having a as an idempotent.

[2 marks]

Soalan 7

Berikut adalah takrif bagi idempoten dalam suatu gelanggang R:

Biar R suatu gelanggang dan r adalah suatu unsur dalam R. Maka r dinamakan suatu idempoten bagi R jika $r^2 = r$.

(a) Bina satu contoh gelanggang R yang mempunyai sekurang-kurangnya dua unsur idempoten.

[4 markah]

(b) Tunjukkan bahawa semua idempoten dalam suatu gelanggang R adalah pembahagi sifar bagi R.

[2 markah]

(c) Tunjukkan 1-a adalah juga suatu idempoten dalam gelanggang R jika R adalah suatu gelanggang tukar tertib yang mempunyai a sebagai satu idempoten.

[2 markah]

-oooOOooo-