Second Semester Examination
2017/2018 Academic Session

May/June 2018

MSS402 - Real Analysis
[Analisis Nyata]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **SIX (6)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM (6)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions: Answer **all five [5]** questions.

*[**Arahan**: Jawab **semua lima [5]** soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

Question 1

Let f be a bounded function on $[a,b]$ and $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ be a partition of $[a,b]$. Also, $\|\mathcal{P}\| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$ denotes the norm of $\mathcal{P}$.

(a) Give the definition of f to be Riemann integrable on $[a,b]$.
(b) It is a fact that step functions are Riemann integrable. Suppose that for any $\epsilon > 0$, there are step functions f_1 and f_2 such that $f_1 \le f \le f_2$ on $[a,b]$, and

$$\int_a^b f_2 - \int_a^b f_1 < \epsilon.$$

Consider the sets

$$S := \left\{ \int_a^b f_1 : f_1 \text{ a step function}, f_1 \le f \right\}$$

and

$$T := \left\{ \int_a^b f_2 : f_2 \text{ a step function}, f \le f_2 \right\}.$$

(i) Explain why $\sup S$ and $\inf T$ exist.
(ii) Prove that $\sup S = \inf T$.

(c) Show that if f satisfies the conditions in (b), then f is Riemann integrable on $[a,b]$.

[60 marks]

Soalan 1

Andaikan f fungsi terbatas pada $[a,b]$ dan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ suatu petak pada $[a,b]$. Juga, $\|\mathcal{P}\| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$ menandai norma untuk $\mathcal{P}$.

(a) Beri takrif untuk f terkamirkan secara Riemann pada $[a,b]$.
(b) Adalah satu fakta bahawa fungsi langkah adalah terkamirkan secara Riemann. Andaikan bahawa untuk sebarang $\epsilon > 0$, terdapat fungsi-fungsi langkah f_1 dan f_2 sedemikian $f_1 \le f \le f_2$ pada $[a,b]$ dan

$$\int_a^b f_2 - \int_a^b f_1 < \epsilon.$$

Pertimbangkan set

$$S := \left\{ \int_a^b f_1 : f_1 \textit{ fungsi langkah}, f_1 \le f \right\}$$

dan

$$T := \left\{ \int_a^b f_2 : f_2 \textit{ fungsi langkah}, f \le f_2 \right\}.$$

(i) Jelaskan kenapa $\sup S$ dan $\inf T$ wujud.
(ii) Buktikan bahawa $\sup S = \inf T$.

(c) Tunjukkan bahawa jika f memenuhi syarat-syarat dalam (b), maka f terkamirkan secara Riemann pada $[a,b]$.

[60 markah]

Question 2

Let A be any subset of $[0,1]$. The *outer measure* m^* of A is defined to be

$$m^*(A) = \inf\left\{m^*(G) : A \subset G, G \text{ open in } [0,1]\right\},$$

and the *inner measure* m_* of A is defined to be

$$m_*(A) = 1 - m^*([0,1] - A).$$

(a) Give the definition for a set A to be measurable, in terms of outer and inner measures. Also, define the measure $m(A)$ of A.

(b) By using the fact that an outer measure m^* satisfies the countably subadditive property, show that $m_*(A) \leq m^*(A)$.

(c) Prove that if $m^*(A) = 0$, then A is measurable with $m(A) = 0$.

(d) Show that if A is a countable set, then A is measurable.

(e) If B is another subset of $[0,1]$ satisfying $m_*(A) + m_*(B) = m^*(A) + m^*(B)$, show that B is measurable.

[40 marks]

Soalan 2

Andaikan A sebarang subset kepada $[0,1]$. Sukatan terkeluar m^* *untuk A ditakrifkan sebagai*

$$m^*(A) = \inf\left\{m^*(G) : A \subset G, G \textit{ terbuka pada } [0,1]\right\},$$

dan sukatan terkedalam m_* *untuk A ditakrifkan sebagai*

$$m_*(A) = 1 - m^*([0,1] - A).$$

(a) Beri takrif untuk set A tersukatkan, dengan menggunakan sukatan terkeluar dan terkedalam. Juga, takrifkan sukatan $m(A)$ untuk A.

(b) Dengan menggunakan fakta bahawa sukatan terkeluar m^* memenuhi sifat sub-penambahan terbilangkan, tunjukkan bahawa $m_*(A) \leq m^*(A)$.

(c) Buktikan bahawa jika $m^*(A) = 0$, maka A tersukatkan dengan $m(A) = 0$.

(d) Tunjukkan bahawa jika A subset terbilangkan, maka A tersukatkan.

(e) Jika B adalah satu lagi subset kepada $[0,1]$ yang memenuhi $m_*(A) + m_*(B) = m^*(A) + m^*(B)$, tunjukkan bahawa B adalah tersukatkan.

[40 markah]

Question 3

Let A be a bounded measurable set. A function f defined on A is said to be *measurable* if for any real number c, the set $\{x \in A : c < f(x)\}$ is measurable.

(a) Prove that for every subset B of A, the characteristic function χ_B of B is measurable if and only if B is measurable.

(b) Consider the function $f : A \to \mathbb{R}$ given by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Show that f is a measurable function.

(c) If f is measurable on A and $f = g$ a.e. (almost everywhere), then show that g is also measurable on A.

[30 marks]

Soalan 3

Andaikan A set tersukatkan yang terbatas. Suatu fungsi f tertakrif pada A disebut tersukatkan *jika untuk sebarang nombor nyata c, set $\{x \in A : c < f(x)\}$ adalah tersukatkan.*

(a) Buktikan bahawa untuk setiap subset B kepada A, fungsi cirian χ_B untuk B adalah tersukatkan jika dan hanya jika B tersukatkan.

(b) Pertimbangkan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ yang diberi oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{jika } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \textit{jika } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa f ialah fungsi tersukatkan.

(c) Jika f tersukatkan pada A dan $f = g$ a.e. (hampir di mana-mana), maka tunjukkan bahawa g juga tersukatkan pada A.

[30 markah]

Question 4

(a) Let $y = f(x) = x^2$ on $[-2, 1]$.
(i) By considering the partition $\mathcal{P} = \{-2, -1, 1/4, 4/5, 1\}$ of $[-2, 1]$, write out the Riemann sum $R(f; \mathcal{P})$ for f. Simplify that sum.
(ii) Now, consider the partition $\mathcal{P} = \{0, 1/4, 1/2, 1, 3, 5\}$ of $[0, 5]$ on the y-axis. Write out the Lebesgue sum $L(f; \mathcal{P})$ for f. Simplify that sum.

(b) If $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, find the value of $\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\, dm$.

(c) Suppose that $f \geq 0$ and $\int_A f\, dm = 0$. Show that $f = 0$ a.e. on A.

[40 marks]

Soalan 4

(a) Andaikan fungsi $y = f(x) = x^2$ pada $[-2, 1]$.
(i) Dengan mempertimbangkan petak $\mathcal{P} = \{-2, -1, 1/4, 4/5, 1\}$ untuk $[-2, 1]$, tulis hasil tambah Riemann $R(f; \mathcal{P})$ untuk f. Permudahkan hasil tambah tersebut.
(ii) Sekarang pertimbangkan petak $\mathcal{P} = \{0, 1/4, 1/2, 1, 3, 5\}$ untuk $[0, 5]$ pada paksi y. Tulis hasil tambah Lebesgue $L(f; \mathcal{P})$ untuk f. Permudahkan hasil tambah tersebut.

(b) Jika $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, cari nilai untuk $\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\, dm$.

(c) Andaikan $f \geq 0$ dan $\int_A f\, dm = 0$. Tunjukkan bahawa $f = 0$ a.e. pada A.

[40 markah]

Question 5

(a) State the Lebesgue Dominated Convergence Theorem.

(b) Let $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ be the enumeration of the rational numbers in $[0, 1]$. Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions on $[0, 1]$ given by

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \{r_1, r_2, \ldots r_n\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(i) Explain why f_n is measurable for each n.
(ii) If f is the limit of $\{f_n\}$, what is f?
(iii) Is f a measurable function? Give your reason.
(iv) By using part (a), determine the value of $\int_{[0,1]} f\, dm$.

[30 marks]

Soalan 5

(a) Nyatakan Teorem Penumpuan Terdominasi Lebesgue.

(b) Andaikan $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ pengangkaan nombor nisbah pada $[0, 1]$. Biar $\{f_n\}$ merupakan jujukan fungsi pada $[0, 1]$ yang diberikan oleh

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \textit{if } x \in \{r_1, r_2, \ldots r_n\}, \\ 0, & \textit{sebaliknya.} \end{cases}$$

(i) Terangkan kenapa f_n tersukatkan untuk setiap n.
(ii) Jika f ialah had untuk $\{f_n\}$, apakah f?
(iii) Adakah f fungsi tersukatkan? Beri alasan anda.
(iv) Dengan menggunakan bahagian (a), tentukan nilai untuk $\int_{[0,1]} f\, dm$.

[30 markah]

- ooo O ooo -