

**SULIT**

---



Second Semester Examination  
2017/2018 Academic Session

May / June 2018

**MSG328 - Introduction to Modelling  
(Pengenalan Pemodelan)**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

---

Please check that this examination paper consists of **EIGHT (8)** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LAPAN (8)** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions** : Answer **all five (5)** questions.

**Arahan** : Jawab **semua lima (5)** soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

...2/-

**SULIT**

**Question 1**

- (a) Explain briefly the flow of a modelling process beginning with an examination of real data.
- (b) Define how a sequence, a dynamical system and a numerical solution are related to each other.
- (c) Your parents have RM 100000 of annuity in a banking institution. The value of the annuity increases every month by receiving an automatic deposit of 1% interest on the previous month's balance. However, they make a withdrawal of RM1000 at the beginning of each month for living expenses.
- (i) Formulate a dynamical system that models the change in the annuity.
- (ii) Will the annuity be used up? If yes, when?

[100 marks]

**Soalan 1**

- (a) *Terangkan secara ringkas aliran proses pemodelan bermula dengan pemeriksaan ke atas data sebenar.*
- (b) *Takrifkan bagaimana suatu jujukan, sistem dinamik dan penyelesaian berangka saling berkait sesama sendiri.*
- (c) *Ibu bapa anda mempunyai RM100000 anuiti di dalam sebuah institusi perbankan. Nilai anuiti tersebut meningkat setiap bulan dengan menerima deposit secara automatik dengan bunga sebanyak 1% ke atas baki pada bulan sebelumnya. Walau bagaimanapun, mereka membuat pengeluaran sebanyak RM1000 pada setiap awal bulan untuk perbelanjaan sara hidup.*
- (i) *Rumuskan sebuah sistem dinamik bagi memodelkan perubahan ke atas anuiti tersebut.*
- (ii) *Adakah anuiti tersebut akan kehabisan? Jika ya, bila?*

[100 markah]

...3/-

**Question 2**

- (a) Equilibrium values can be helpful in understanding the long term behaviour of a dynamical system, for example

$$a_{n+1} = ra_n + b.$$

Define an equilibrium value of the above dynamical system and comment on the long term behaviour according to the value of constant  $r$ .

- (b) A rumour about company merging is spreading through 1000 employees, all working in the same building. In an assumption that the spreading of rumour is similar to the spreading of contagious disease whereby the number of employees hearing the rumour each day is proportional to the product of the number of employees who have heard the rumour previously and the number of employees who have not heard the rumour. This situation is described by

$$a_{n+1} = a_n + 1000ka_n(1000 - a_n),$$

where  $a_n$  is the number of employees hearing the rumour,  $k$  is the parameter that depends on how fast the rumour spreads and  $n$  is the number of days. Assume  $k = 0.001$  and further assume that in the very beginning, only four employees knew about the rumour. Determine when will the rumour be spread to all 1000 employees?

[100 marks]

**Soalan 2**

- (a) *Nilai keseimbangan boleh membantu untuk memahami perilaku jangka panjang bagi sebuah sistem dinamik, contohnya seperti*

$$a_{n+1} = ra_n + b.$$

*Takrifkan nilai keseimbangan bagi sistem dinamik di atas dan beri ulasan tentang perilaku jangka panjang berdasarkan nilai pemalar  $r$ .*

...4/-

- (b) Sebuah khabar angin tentang penggabungan syarikat sedang menular dalam kalangan 1000 orang pekerja, semuanya bekerja dalam bangunan yang sama. Dengan andaian bahawa penularan khabar angin tersebut adalah serupa dengan penularan penyakit berjangkit yang mana bilangan pekerja yang mendengar khabar angin tersebut setiap hari adalah berkadaran dengan hasil darab bilangan pekerja yang pernah mendengar khabar angin tersebut sebelumnya dan bilangan pekerja yang tidak pernah mendengar khabar angin tersebut. Situasi ini dapat digambarkan sebagai

$$a_{n+1} = a_n + 1000ka_n(1000 - a_n),$$

di mana  $a_n$  adalah bilangan pekerja yang mendengar khabar angin tersebut,  $k$  adalah parameter yang bersandar dengan seberapa laju khabar angin tersebut menular dan  $n$  adalah bilangan hari. Andaikan  $k = 0.001$  dan seterusnya, andaikan bahawa pada asalnya hanya empat orang pekerja yang tahu tentang khabar angin tersebut. Tentusahkan bilakah khabar angin tersebut akan menular kepada semua 1000 orang pekerja?

[100 markah]

### Question 3

- (a) Currently, the most frequently used curve-fitting criterion is the least-squares criterion. If we use this criterion to fit a curve of the form  $y = ax^n$ , show that the solution for  $a$  is given by

$$a = \frac{\sum x_i^n y_i}{\sum x_i^{2n}}.$$

- (b) In Kepler's Third Law relationship, he stated that "The square of the orbital period of a planet is directly proportional to the cube of the semi-major axis of its orbit from the Sun." Referring to the data in Table 1 and based on the result in (a), fit the model  $y = ax^{\frac{3}{2}}$  into the data.

...5/-

Table 1: Data for planets

Planet	Period (sec)	Distance from the sun (m)
Mercury	$7.60 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$
Venus	$1.94 \times 10^7$	$1.08 \times 10^{11}$
Earth	$3.16 \times 10^7$	$1.5 \times 10^{11}$
Mars	$5.94 \times 10^7$	$2.28 \times 10^{11}$
Jupiter	$3.74 \times 10^8$	$7.79 \times 10^{11}$
Saturn	$9.35 \times 10^8$	$1.43 \times 10^{12}$
Uranus	$2.64 \times 10^9$	$2.87 \times 10^{12}$
Neptune	$5.22 \times 10^9$	$4.5 \times 10^{12}$
Pluto	$7.82 \times 10^9$	$5.91 \times 10^{12}$

[100 marks]

**Soalan 3**

- (a) Pada masa kini, kriteria penyesuaian lengkung yang paling kerap digunakan adalah kriteria kuasa dua terkecil. Jika kita menggunakan kriteria ini untuk memadamkan sebuah lengkung berbentuk  $y = ax^n$ , tunjukkan bahawa penyelesaian bagi  $a$  adalah

$$a = \frac{\sum x_i^n y_i}{\sum x_i^{2n}}$$

- (b) Dalam hubungan Hukum Kepler Ketiga, beliau menyatakan bahawa “Kuasa dua bagi tempoh orbit sebuah planet adalah berkadar terus dengan kuasa tiga paksi semi-major orbit tersebut dari Matahari.” Merujuk kepada data dalam Jadual 1 dan berdasarkan kepada keputusan di (a), padankan model  $y = ax^{\frac{3}{2}}$  ke dalam data tersebut.

...6/-

*Jadual 1: Data bagi planet*

<i>Planet</i>	<i>Tempoh (saat)</i>	<i>Jarak dari matahari (m)</i>
<i>Mercury</i>	$7.60 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$
<i>Venus</i>	$1.94 \times 10^7$	$1.08 \times 10^{11}$
<i>Earth</i>	$3.16 \times 10^7$	$1.5 \times 10^{11}$
<i>Mars</i>	$5.94 \times 10^7$	$2.28 \times 10^{11}$
<i>Jupiter</i>	$3.74 \times 10^8$	$7.79 \times 10^{11}$
<i>Saturn</i>	$9.35 \times 10^8$	$1.43 \times 10^{12}$
<i>Uranus</i>	$2.64 \times 10^9$	$2.87 \times 10^{12}$
<i>Neptune</i>	$5.22 \times 10^9$	$4.5 \times 10^{12}$
<i>Pluto</i>	$7.82 \times 10^9$	$5.91 \times 10^{12}$

[100 markah]

**Question 4**

- (a) As an amateur baker, you are willing to produce two types of cakes. The first cake requires twice as long to produce compared with the second type. If you only produce the second type, 50 pieces will be produced. The daily market sales limit for the first type is 15 and for the second type is 25. The profit margin for the first cake is RM8.00 and RM5.00 for the second type. Formulate a mathematical model to assist in determining the number of cakes, according to type, that needs to be produced in order for you to earn an optimum profit.
- (b) From the model obtained in (a), solve the problem by using graphical method.
- (c) Find the maximum of  $f(x, y, z) = 6x + 6y + 5z$  subject to

$$\begin{aligned} x + y + 2z &\leq 12, \\ x + 2y + z &\leq 12, \\ 2x + y + z &\leq 12, \\ x, y, z &\geq 0, \end{aligned}$$

using the simplex method.

[100 marks]

...7/-

**Soalan 4**

- (a) Sebagai seorang pembuat kek amatur, anda mampu untuk menghasilkan dua jenis kek. Kek yang pertama memerlukan dua kali ganda masa yang diambil untuk dihasilkan berbanding dengan kek yang kedua. Jika anda hanya membuat kek yang kedua, 50 biji kek dapat dihasilkan. Jualan pasaran harian terhadap kepada 15 biji untuk kek yang pertama dan 25 biji untuk kek yang kedua. Margin keuntungan bagi kek yang pertama adalah RM8.00 dan RM5.00 untuk kek yang kedua. Rumuskan sebuah model matematik bagi menentukan bilangan kek mengikut jenis, yang perlu dihasilkan supaya anda memperoleh keuntungan optimum.
- (b) Daripada model yang diperoleh di (a), selesaikan masalah tersebut menggunakan kaedah graf.
- (c) Cari nilai maksimum bagi  $f(x, y, z) = 6x + 6y + 5z$  tertakluk kepada

$$x + y + 2z \leq 12,$$

$$x + 2y + z \leq 12,$$

$$2x + y + z \leq 12,$$

$$x, y, z \geq 0,$$

menggunakan kaedah simpleks.

[100 markah]

**Question 5**

- (a) Consider the following two predator-prey systems of differential equations:

(i)	(ii)
$\frac{dx}{dt} = 5x \left(1 - \frac{x}{10}\right) - 10xy,$ $\frac{dy}{dt} = -2.5y + \frac{xy}{40}.$	$\frac{dx}{dt} = 0.15x - \frac{xy}{200},$ $\frac{dy}{dt} = 7.5y \left(1 - \frac{y}{15}\right) + 12.5xy.$

In one of these systems, the preys are very large animals and the predators are very small animals, such as cows and mosquitos. The other system has very large predators and very small prey, such as orca whales and small fishes. Determine which system is which and provide justification for your answer.

...8/-

- (b) In a spread of a disease problem, the disease will keep infecting new victims until they are destroyed by a good vaccination program. If more vaccination program is done; the number of cases will be reduced as many as possible. This situation will lead us to the development of Susceptible-Infected-Recovered (SIR) model.
- (i) Formulate the SIR model that best describes the above problem by using the following details:
- $S$  is the number of susceptible humans.
  - $I$  is the number of infected humans.
  - $R$  is the number of recovered humans, where  $R = 1 - S - I$ .
- (ii) Calculate the equilibrium points of the model.

[100 marks]

**Soalan 5**

- (a) *Pertimbangkan sistem mangsa-pemangsa bagi sistem persamaan pembezaan berikut:*

(i)	(ii)
$\frac{dx}{dt} = 5x \left(1 - \frac{x}{10}\right) - 10xy,$ $\frac{dy}{dt} = -2.5y + \frac{xy}{40}.$	$\frac{dx}{dt} = 0.15x - \frac{xy}{200},$ $\frac{dy}{dt} = 7.5y \left(1 - \frac{y}{15}\right) + 12.5xy.$

*Dalam salah sebuah sistem ini, mangsa mempunyai saiz yang sangat besar dan pemangsa mempunyai saiz yang sangat kecil, seperti lembu dan nyamuk. Sistem yang lain pula mempunyai pemangsa yang bersaiz besar dan mangsa yang bersaiz kecil seperti ikan paus orca dan ikan kecil. Tentusahkan sistem yang manakah dapat digambarkan dengan setiap situasi di atas dan berikan justifikasi kepada jawapan anda.*

- (b) *Dalam masalah penularan suatu penyakit, penyakit tersebut akan terus menjangkiti mangsa baru sehinggalah penyakit itu dimusnahkan dengan program vaksinasi yang baik. Jika lebih banyak program vaksinasi yang dijalankan; bilangan kes penyakit yang baharu dapat dikurangkan sebanyak mungkin. Situasi ni akan membawa kita kepada pembangunan model SIR.*
- (i) *Rumuskan suatu model SIR yang menggambarkan secara terbaik masalah di atas dengan menggunakan maklumat yang berikut:*
- $S$  adalah bilangan individu yang terdedah kepada penyakit.
  - $I$  adalah bilangan individu yang telah terkena penyakit.
  - $R$  adalah bilangan individu yang telah bebas daripada penyakit,  $R = 1 - S - I$ .
- (ii) *Kira titik keseimbangan bagi model tersebut.*

[100 markah]

-oooOOooo-